

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**MINIMALIZACE SPOTŘEBY PALIVA VOZIDLA NA
VÝŠKOVÉM PROFILU VOZOVKY**

MINIMIZATION OF THE CAR FUEL CONSUMPTION ON THE ROUTE ELEVATION PROFILE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jan Srba

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Tomáš Mauder, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Jan Srba**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Tomáš Mauder, Ph.D.**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Minimalizace spotřeby paliva vozidla na výškovém profilu vozovky

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Problematika minimalizace spotřeby paliva spočívá v sestavení matematického modelu, který popisuje základní parametry automobilu a základní parametry výškového profilu. K účelové funkci, která minimalizuje spotřebu paliva jsou připojeny pohybové rovnice a nerovnice rychlostního omezení. Na tvorbu matematického modelu by měl být použit program MATLAB nebo program GAMS, popř. jejich kombinace.

Cíle bakalářské práce:

Cílem bakalářské práce je matematické popsání problému, vytvoření matematického modelu vozidla v programu MATLAB popř. v programu GAMS nebo jejich kombinaci, výpočet optimalizace jízdy a analýza vlivu rychlostních omezení na výškovém profilu.

Seznam literatury:

GILLESPIE, Thomas D. Fundamentals of vehicle dynamics. Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 1992. ISBN 15-609-1199-9.

RAO, Singiresu S. Engineering optimization: Theory and practice. 4th ed. Hoboken: Wiley, 2009. ISBN 978-0-470-18352-6.

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá matematickým modelováním spotřeby paliva vozidla jedoucího po trase charakterizované svým výškovým profilem. Obsahuje základy podélné dynamiky vozidel, které jsou nezbytné pro sestavení modelu. Cílem práce je spotřebu na dané trase minimalizovat, k čemuž byly použity heuristické algoritmy, v práci je proto uveden popis použitých heuristických metod a také výsledky jejich implementace v prostředí MATLAB.

Summary

This thesis deals with mathematical modelling of the fuel consumption of a vehicle going on the route described by its elevation profile. It contains fundamentals of vehicle longitudinal dynamics which are essential for creating the model. The main goal of this thesis is to minimize the fuel consumption on given route using heuristic algorithms, hence a description of used heuristic algorithms and results of their implementation in MATLAB are presented.

Klíčová slova

Spotřeba paliva, podélná dynamika vozidel, modelování, optimalizace, heuristické algoritmy.

Keywords

Fuel consumption, longitudinal dynamics of vehicles, modelling, optimization, heuristic algorithms

SRBA, J. *Minimalizace spotřeby paliva vozidla na výškovém profilu vozovky*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 64 s. Vedoucí Ing. Tomáš Mauder, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Ing. Tomáše Maudera, Ph.D. a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu.

V Brně dne 26. května 2017

.....

Jan Srba

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Tomáši Mauderovi, Ph.D. za cenné konzultace a rady, bez kterých by se má práce neobešla, a dále také doc. Ing. Petru Portešovi, Ph.D., Ing. Davidu Svídovi, Ph.D. a Ing. Lubomíru Drápalovi za konzultace ohledně dynamiky vozidel a spalovacích motorů. Závěrem chci poděkovat také mým nejbližším, kteří mi při psaní bakalářské práce byli oporou.

Jan Srba

Obsah

Úvod	11
1 Vozidlo a jeho pohyb	13
1.1 Síly působící na vozidlo	13
1.1.1 Souřadný systém	13
1.1.2 Aerodynamická síla	14
1.1.3 Valivý odpor	14
1.1.4 Odpor stoupání	15
1.1.5 Hnací síla	16
1.1.6 Odpor zrychlení	17
1.1.7 Výsledná silová rovnice	17
1.2 Spotřeba paliva	18
1.2.1 Brzdění motorem	20
2 Model pohybu vozidla	23
2.1 Průběh výpočtu	23
2.2 Vybrané simulace jízdy	24
2.2.1 Jízda po rovině	24
2.2.2 Stoupání a sjezd	27
3 Optimalizační algoritmy	31
3.1 Úvod do optimalizace	31
3.2 Heuristické algoritmy	32
3.2.1 Lokální hledání (Local search)	34
3.2.2 Simulované žíhání (Simulated annealing)	34
3.2.3 Optimalizace hejnem částic (Particle swarm optimization)	37
3.2.4 Algoritmus světlušek (Firefly algorithm)	39
3.3 Penalizační funkce	42
4 Implementace optimalizačních algoritmů	43
4.1 Formulace optimalizační úlohy	43
4.2 Průběh výpočtu	43
4.3 Výsledky	46
4.3.1 Nastavení parametrů	46
4.3.2 Nalezené řešení	48
5 Závěr	53
Seznam použité literatury	55
Seznam použitých zkratk a symbolů	57
Seznam příloh	59

A Použitá data a parametry	61
B Další výsledky	63

Úvod

I přes intenzivní výzkum v oblasti alternativních pohonů vozidel má spalovací motor v současné automobilové dopravě stále významnou a nezastupitelnou úlohu. Ať už se jedná o motor zážehový nebo vznětový, jednou z jeho nejdůležitějších vlastností je kromě např. spolehlivosti, výkonu či kultivovanosti také jeho úspornost, a s tím, jak rostou ceny pohonných hmot, vystupuje tato vlastnost stále více do popředí našeho zájmu. Ovšem není to pouze motor, který ovlivňuje, jaké množství paliva na naší cestě spotřebujeme. Velmi důležitou roli v oblasti spotřeby pohonných hmot hraje také jízdní styl každého řidiče, zejména způsob, jakým akceleruje, brzdí a volí rychlostní stupně. Proto si tato práce klade za cíl minimalizovat spotřebu paliva vozidla hledáním vhodného průběhu rychlosti a řazení na dané trase, další aspekty ovlivňující spotřebu paliva, jako jsou např. tlak v pneumatikách, převodové poměry či zatížení vozidla, nebudou v této práci primárně rozebírány.

K nalezení optimálního průběhu rychlosti a řazení na dané trase byly v této práci využity heuristické algoritmy. Jsou to relativně mladé optimalizační nástroje, jejichž historie sahá do éry II. světové války, kdy britští kryptoanalytici v čele s Alanem Turingem sestrojili zařízení pro rozšifrování kódu Enigma [20]. Metodu, kterou zařízení využívalo, Turing nazval *heuristické hledání*, což lze chápat jako hledání pomocí pokusu a omylu.

Další rozvoj těchto optimalizačních nástrojů šel ruku v ruce s vývojem výpočetní techniky. Významným milníkem v historii heuristických algoritmů byla publikace genetických algoritmů v roce 1975 vyvinutých J. Hollandem. Většího rozmachu se tato oblast dočkala také v osmdesátých a devadesátých letech minulého století, kupříkladu v roce 1983 byl S. Kirkpatrickem, C. D. Gellatem a M. P. Vecchim vytvořen algoritmus simulovaného žíhání, roku 1992 byla zveřejněna práce M. Doriga popisující mj. mravenčí algoritmy a rok 1995 dal vzniknout algoritmu hejna částic. Z těch v současnosti nejmladších algoritmů zmiňme například algoritmus světlušek uveřejněný roku 2007 Xin-She Yangem, případně netopýří algoritmus publikovaný týměž autorem v roce 2010.

K řešení našeho problému je v této práci využit algoritmus lokálního hledání, simulovaného žíhání, optimalizace hejnem částic a algoritmus světlušek. Kromě výše uvedeného je cílem práce jednotlivé algoritmy mezi sebou porovnat a zhodnotit jejich vhodnost pro řešení naší optimalizační úlohy.

1. Vozidlo a jeho pohyb

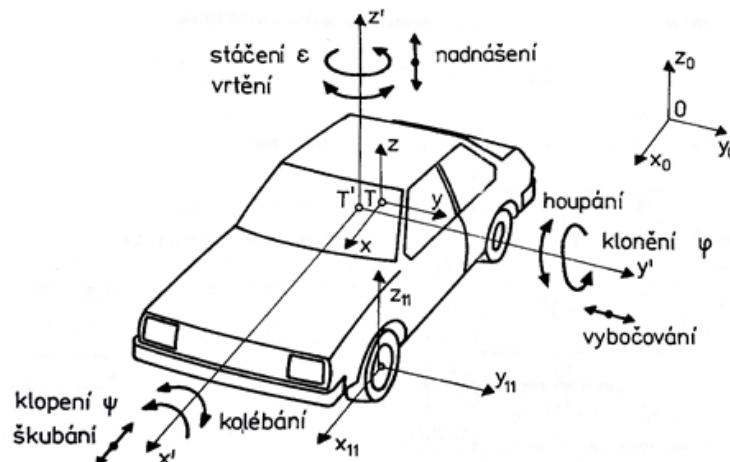
K tomu, abychom mohli nějakým způsobem modelovat a kvantifikovat spotřebu paliva jedoucího vozidla, je nejprve nutné provést rozbor jeho pohybu a definovat veličiny s tímto pohybem spojené. V následující podkapitole by proto měla být rozebrána dynamika vozidel. Vzhledem ke skutečnosti, že při výpočtech spotřeby paliva se obvykle uvažuje jen dynamika podélná, omezíme se pouze na ni [14].

1.1. Síly působící na vozidlo

V této podkapitole budou popsány jednotlivé síly, které na vozidlo působí. Snahou je stručně popsat, jak tyto síly vznikají, a také uvést způsob jejich výpočtu.

1.1.1. Souřadný systém

Jelikož je síla vektorová veličina, měli bychom ještě před tím, než začneme jednotlivé síly definovat, zavést vhodný souřadný systém. Obvykle bývá účelné zavést pevný souřadný systém x_0, y_0, z_0 , a také souřadný systém x, y, z pevně spjatý s vozidlem, jehož počátek je umístěn do těžiště automobilu, resp. souřadný systém x', y', z' , jehož počátek je v těžišti odpružené části karoserie. Zavedení jednotlivých souřadných systémů je možno vidět na obrázku 1.1. Podél os x_0 a x bývá vyšetřována podélná dynamika, neboli problém přímé jízdy. Při přímé jízdě mají tyto osy obvykle stejný směr [17].



Obrázek 1.1: Souřadné systémy [17]

Náš problém se tedy redukuje na vyšetřování sil podél jedné osy, díky čemuž se lze s vektorovou povahou sil vypořádat zavedením následující znaménkové konvence: jestliže síla působící na vozidlo má směr totožný se směrem osy x , přisoudíme jí kladné znaménko, zatímco má-li síla směr opačný, bude mít znaménko záporné. Poznamenejme, že tuto znaménkovou konvenci využijeme až při sestavení silové rovnice, zatímco jednotlivé síly budeme definovat vždy s kladným znaménkem.

1.1.2. Aerodynamická síla

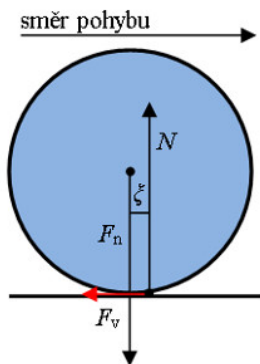
Interakcí mezi vzduchem a pohybujícím se vozidlem vzniká aerodynamická síla. Tato síla je vytvářena dvěma zdroji - působením tlaku a tření, její velikost je tedy dána výslednicí tlakových sil působících kolmo na karoserii vozidla a třecích sil, které působí v mezní vrstvě na povrchu vozidla a mají směr tečný vzhledem k proudění vzduchu kolem karoserie. Z praktického hlediska lze vliv vzájemného působení vozidla a proudu vzduchu popsat aerodynamickou přítláčnou silou a aerodynamickou odporovou silou. V této práci budeme přítláčnou sílu zanedbávat a v potaz vezmeme pouze aerodynamickou odporovou sílu, která je definována empirickým vztahem

$$F_{DA} = \frac{1}{2} c_x S_x \rho v^2, \quad (1.1)$$

kde c_x je součinitel odporu vzduchu, který je závislý především na tvaru vozidla. Zahrnuje všechny vzdušné odpory, tedy i např. indukovaný vzdušný odpor, odpor vznikající při proudění vzduchu chladicím a větracím systémem nebo odpor způsobený vířením vzduchu kolem otáčejících se kol [11][17]. Člen S_x představuje čelní plochu vozidla, ρ je hustota vzduchu proudícího kolem automobilu a v je náporová rychlost, tedy vektorový součet rychlosti vozidla a rychlosti větru v m/s [17][7]. Pro jednoduchost budeme uvažovat nulovou rychlost větru, takže náporová rychlost a rychlost vozidla budou stejné.

1.1.3. Valivý odpor

Při jízdě po rovině nižší rychlostí je primárním jízdním odporem odpor valivý. Ten vzniká vlivem deformace pneumatiky a vozovky. Uvažujeme-li tuhou vozovku, pak dochází pouze k deformaci pneumatiky. Při valení dochází ke stlačování pneumatiky do roviny vozovky a k jejímu následnému vyrovnávání zpět do kruhového tvaru. Kvůli ztrátám v pneumatice jsou ale měrné tlaky způsobující stlačení pneumatiky větší než ty, které ji navrácí zpět do kruhového tvaru, a díky tomu je radiální reakce vozovky N předsunuta před svislou osu kola o vzdálenost ξ [17], která bývá nazývána jako rameno valivého odporu. Schematicky je to znázorněno na obrázku 1.2. Radiální reakce vozovky N má ovšem stejnou velikost jako normálová síla F_n , a tak vzniká točivý moment působící proti směru valení pneumatiky.



Obrázek 1.2: Valivý odpor [2]

K tomu, abychom mohli z točivého momentu působícího proti valení pneumatiky vypočítat valivý odpor, zavedeme součinitel valivého odporu, definovaný vztahem

$$f_r = \frac{\xi}{r_d}, \quad (1.2)$$

kde r_d je dynamický poloměr kola, což je kolmá vzdálenost středu kola od opěrné plochy [17]. Součinitel valivého odporu je závislý na mnoha parametrech, jmenujme např. tlak vzduchu v pneumatice, teplotu, použitý materiál a v neposlední řadě také rychlost vozidla a povrch vozovky. Vliv rychlosti na hodnotu součinitele je zejména při nižších rychlostech malý, proto budeme součinitel považovat za nezávislý na rychlosti. Za předpokladu, že na všech kolech je hodnota součinitele stejná, lze celkový valivý odpor vyjádřit dle [14] ve tvaru

$$F_{RR} = f_r M g \cos(\alpha), \quad (1.3)$$

kde M je hmotnost vozidla, g je tíhové zrychlení a α představuje úhel stoupání, který bude definován v následujícím textu.

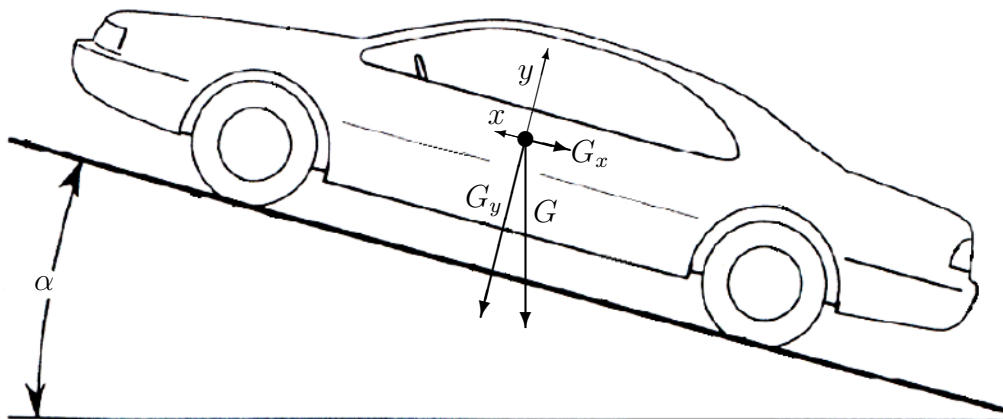
1.1.4. Odpor stoupání

Není těžké si představit, že výškový profil trasy, po které se vozidlo pohybuje, má zásadní vliv na spotřebu paliva. Stoupání totiž značně ovlivňuje velikost výslednice jízdních odporů působících na vozidlo a mezi velikostí této silové výslednice a spotřebou paliva bývá úzká vazba. Odpor stoupání je určen složkou G_x tíhové síly G působící na automobil, kde složka G_x je rovnoběžná s vozovkou [17]. Zřejmě platí

$$G_x = G \sin(\alpha), \quad (1.4)$$

kde α je úhel stoupání definovaný jako úhel, který svírá vozovka s vodorovnou rovinou, viz obrázek 1.3. Vzhledem k tomu, že tíhová síla je definována vztahem $G = Mg$ [8], lze psát výsledný odpor stoupání ve tvaru

$$F_{GR} = G_x = M g \sin(\alpha). \quad (1.5)$$



Obrázek 1.3: Odpor stoupání [7]

1.1.5. Hnací síla

Ještě před tím, než zavedeme poslední jízdní odpor - odpor zrychlení, definujeme pojem hnací síly, který, jak uvidíme níže, s odporem zrychlení úzce souvisí.

Veličinou charakterizující činnost motoru je točivý moment T_e . Ten je ale měřen na dynamometru při konstantních otáčkách motoru, proto se při změně otáček motoru bude výsledný moment na výstupu lišit [7]. Vyjdeme-li z druhého Newtonova zákona s použitím úhlových veličin, dostaneme vztah

$$T_c = T_e - I_e \alpha_e, \quad (1.6)$$

kde T_c je točivý moment na spojce, I_e představuje moment setrvačnosti motoru a α_e je jeho úhlové zrychlení. Točivý moment T_c dále vstupuje do převodovky, kde je násoben převodovým poměrem, je ovšem také zmenšen vlivem setrvačnosti komponent v převodovce

$$T_d = (T_c - I_t \alpha_e) N_t, \quad (1.7)$$

kde T_d je točivý moment na výstupu z převodovky, I_t je moment setrvačnosti částí převodovky a N_t je převodový poměr daný jako poměr otáček hnaného a hnacího hřídele. Obdobně se velikost točivého momentu změní i v rozvodovce

$$T_a = (T_d - I_d \alpha_d) N_f. \quad (1.8)$$

V této rovnici je T_a moment na výstupu z rozvodovky, α_d úhlové zrychlení rozvodovky, I_d její moment setrvačnosti a N_f je její převodový poměr. Stejně jako v předchozích případech se točivý moment sníží i vlivem setrvačnosti poloos a samotných kol. Výslednou hnací sílu F_X na kolech automobilu v závislosti na točivém momentu motoru T_e dostaneme spojením výše uvedených rovnic a vyjádříme ji jako podíl točivého momentu na kolech a jejich dynamického poloměru

$$F_X = \frac{T_e N_{tf}}{r_d} - \frac{(I_e + I_t) \alpha_e N_{tf} + I_d \alpha_d N_f + I_w \alpha_w}{r_d}, \quad (1.9)$$

kde N_{tf} je celkový převodový poměr daný jako součin převodového poměru převodovky a rozvodovky, I_w představuje moment setrvačnosti kol a poloos a α_w jejich úhlové zrychlení. Rovnici (1.9) je ještě vhodné modifikovat s využitím vztahu $a = \alpha_w r_d$, kde a je zrychlení vozidla, a dále vzít v potaz mechanické ztráty v hnacím ústrojí. Rovnice pak přejde na tvar

$$F_X = \frac{T_e N_{tf} \eta_{tf}}{r_d} - ((I_e + I_t) N_{tf}^2 + I_d N_f^2 + I_w) \frac{a}{r_d^2}, \quad (1.10)$$

kde η_{tf} je mechanická účinnost hnacího ústrojí. První člen pravé strany této rovnice představuje hnací sílu na kolech vozidla při konstantní rychlosti. Druhý člen má roli ztráty této síly při změně rychlosti vlivem setrvačnosti a ještě bude zmíněn v následujícím textu.

1.1.6. Odpor zrychlení

Dle druhého Newtonova zákona uděluje síla F objektu (v našem případě vozidlu) o hmotnosti M zrychlení a , jehož směr je totožný se směrem působící síly. Tento zákon lze také interpretovat tak, že chceme-li udělit vozidlu o hmotnosti M zrychlení a musíme na něj působit silou F . Ovšem udělujeme-li vozidlu podélné zrychlení, pak musíme udělit i úhlové zrychlení všem jeho rotujícím částem hnacího ústrojí, čímž by se situace z výpočetního hlediska mohla komplikovat. Vliv rotačních hmot je ale již postižen v rovnici definice hnací síly (1.10), proto bychom mohli odpor zrychlení vyjádřit ve tvaru

$$F_{IN} = Ma. \quad (1.11)$$

Nicméně v praxi se druhý člen z definice hnací síly (1.10) nepoužívá a vliv setrvačnosti rotujících komponent hnacího ústrojí se řeší zavedením *součinitele rotačních součástí* ϑ , jehož přibližná hodnota je určena vztahem dle [7]

$$\vartheta \approx 1 + 0,04 + 0,0025N_{tf}^2. \quad (1.12)$$

Odpor zrychlení pak vyjádříme ve tvaru

$$F_{IN} = \vartheta Ma. \quad (1.13)$$

1.1.7. Výsledná silová rovnice

Již máme zavedeny všechny jízdní odpory¹ a hnací sílu, a proto můžeme s využitím znaménkové konvence uvedené v předchozím textu formulovat rovnici všech sil působících na vozidlo

$$F_{IN} = F_X - F_{DA} - F_{RR} - F_{GR}. \quad (1.14)$$

Po dosazení za jednotlivé členy dostáváme její rozepsanou formu

$$\vartheta Ma = \frac{T_e N_{tf} \eta_{tf}}{r_d} - \frac{1}{2} c_x S_x \rho v^2 - f_r M g \cos(\alpha) - M g \sin(\alpha). \quad (1.15)$$

Zavedením derivace $a = \dot{v}$ tato rovnice přejde do diferenciálního tvaru:

$$\vartheta M \dot{v} = \frac{T_e N_{tf} \eta_{tf}}{r_d} - \frac{1}{2} c_x S_x \rho v^2 - f_r M g \cos(\alpha) - M g \sin(\alpha). \quad (1.16)$$

¹Zanedbáváme odpor taženého přívěsu, neboť přívěs neuvažujeme.

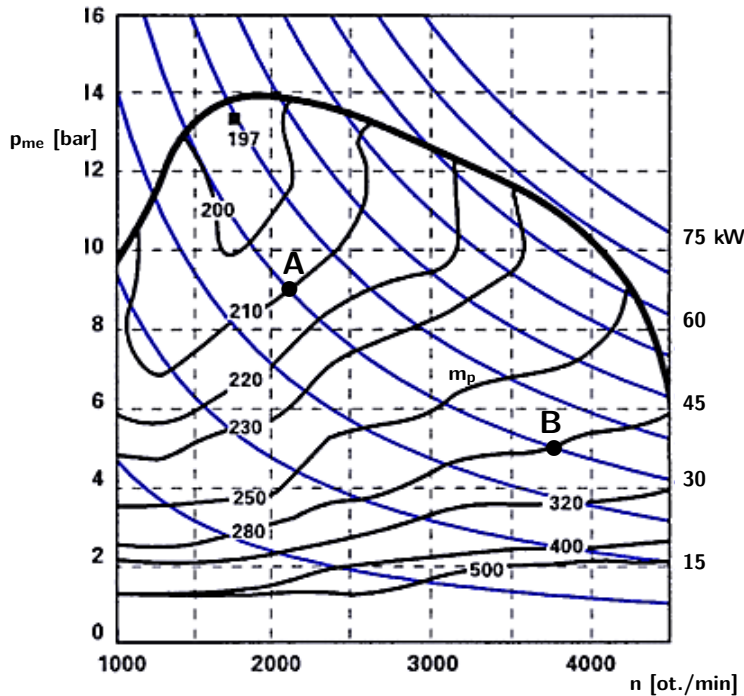
1.2. Spotřeba paliva

Důležitým prvkem našeho modelu vozidla bude úplná rychlostní charakteristika motoru, viz. obr. 1.4, která popisuje závislost měrné spotřeby paliva m_p udávané v jednotkách g/kWh na otáčkách motoru n a na středním efektivním tlaku p_{me} . Střední efektivní tlak je veličina úměrná točivému momentu motoru T_e , proto bývají tyto diagramy namísto závislosti na p_{me} vyjadřovány také v závislosti na T_e . Vztah mezi oběma veličinami je následující:

$$T_e = \frac{V_H p_{me}}{4\pi}, \quad (1.17)$$

kde V_H je zdvihový objem motoru [3].

Měření této charakteristiky bývá prováděno v laboratorních podmínkách při ustálených rychlostních poměrech, proto se skutečná spotřeba při změně rychlosti může lišit. Podstatné je také to, že při měření má motor a všechny podstatné komponenty a náplně provozní teplotu. Měří se obvykle průtokoměry, narozdíl od homologačních testů, kde se spotřeba zjišťuje nepřímou z množství vozidlem produkováných emisí oxidu uhelnatého, oxidu uhličitého a z nespálených uhlovodíků [9].



Obrázek 1.4: Úplná rychlostní charakteristika motoru [5]

Z jednotky měrné spotřeby paliva můžeme vyvodit, že tato veličina udává hmotnost spotřebovaného paliva vztaženou na práci o velikosti 1 kWh vykonanou motorem. Jednotku lze ale také interpretovat jako hmotnostní spotřebu paliva udávanou v g/h vztaženou na výkon P o velikosti 1 kW. S využitím vztahu pro výpočet výkonu

$$P = 2\pi n T_e \quad (1.18)$$

a případným využitím rovnice (1.17) můžeme do diagramu tedy vynést hyperboly konstantního výkonu a na základě toho demonstrovat, jak úplnou rychlostní charakteristiku chápat: předpokládejme, že při jízdě potřebujeme v daném okamžiku 30 kW výkonu k překonání jízdních odporů. Jak můžeme pozorovat z křivek konstantního výkonu, těchto 30 kW lze získat různými kombinacemi otáček motoru a točivého momentu a i když se bude stále jednat o ten samý výkon, z hlediska spotřeby bude hrát významnou roli, zda motor při jízdě bude pracovat např. v bodě A , kde měrná spotřeba nabývá hodnoty 210 g/kWh, nebo v bodě B s hodnotou 280 g/kWh. Dodejme ještě, že ze závislosti měrné spotřeby na p_{me} plyne, že v diagramu již jsou zohledněny vnitřní ztráty motoru, tedy ztráty třením, ztráty hydraulické, pro pohon pomocných agregátů atd. (viz. např. [13]), proto výkon vypočtený dle (1.18) je výkon efektivní, který získáme na výstupu z motoru.

Zvykem je udávat spotřebu paliva v jednotkách l/100 km a my se této konvence budeme držet, proto nyní uvedeme, jak z úplné rychlostní charakteristiky získat spotřebu paliva právě v těchto jednotkách. Vyjdeme z definice měrné spotřeby paliva [17]

$$m_p = \frac{M_{tm}}{P} \left[\frac{\text{g}}{\text{kWh}} \right], \quad (1.19)$$

kde M_{tm} je hodinová hmotnostní spotřeba paliva v jednotkách g/h a P je výkon v kW. Na základě rovnice (1.19) pak můžeme vyjádřit hodinovou objemovou spotřebu:

$$M_{tV} = \frac{10^{-3} M_{tm}}{\rho_p} = \frac{10^{-3} P m_p}{\rho_p} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right], \quad (1.20)$$

kde ρ_p je hustota paliva v kg/m³. Nakonec využijeme rychlosti vozidla k převedení hodinové spotřeby na dráhovou:

$$M_p = \frac{M_{tV}}{v} = \frac{10^2 M_{tm}}{v \rho_p} = \frac{10^2 P m_p}{v \rho_p} \left[\frac{1}{100 \text{ km}} \right], \quad (1.21)$$

kde rychlost v je udávána v km/h. Když nenastává prokluz kol na vozovce, pak mezi rychlostí vozidla a otáčkami motoru platí vztah

$$n = \frac{60 v N_{tf}}{7, 2 \pi r_d} \left[\frac{1}{\text{min}} \right]. \quad (1.22)$$

S využitím tohoto vztahu a také rovnice (1.18) pak můžeme psát

$$M_p = \frac{2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3} \pi T_e m_p \frac{n}{60}}{\frac{7, 2 \pi n r_d}{60 N_{tf}} \rho_p} = \frac{T_e m_p N_{tf}}{36 r_d \rho_p} \left[\frac{1}{100 \text{ km}} \right], \quad (1.23)$$

kde točivý moment motoru T_e je dosazovaný v Nm. Tento vztah udává spotřebu v jednom konkrétním bodě naší trasy, proto pokud chceme získat průměrnou spotřebu na celé trase, budeme integrovat:

$$\Phi_p = \frac{\int_{s_0}^{s_1} M_p ds}{\int_{s_0}^{s_1} ds} = \frac{\int_{s_0}^{s_1} \frac{T_e m_p N_{tf}}{36 r_d \rho_p} ds}{\int_{s_0}^{s_1} ds} \left[\frac{1}{100 \text{ km}} \right]. \quad (1.24)$$

Budeme předpokládat, že hustota paliva a dynamický poloměr kola jsou podél celé trasy konstantní, zatímco točivý moment, celkový převodový poměr a měrná spotřeba paliva se v závislosti na dráze obecně mění. Je tedy možno psát:

$$\Phi_p(T_e, m_p, N_{tf}) = \frac{1}{36 r_d \rho_p (s_1 - s_0)} \int_{s_0}^{s_1} T_e(s) m_p(s) N_{tf}(s) ds \left[\frac{1}{100 \text{ km}} \right], \quad (1.25)$$

kde $\Phi_p(T_e, m_p, N_{tf})$ lze chápat jako funkcionál závislý na funkcích točivého momentu, měrné spotřeby paliva a celkového převodového poměru. Uvědomíme-li si, že měrná spotřeba paliva je funkcí točivého momentu a otáček $m_p = f(T_e, n)$ a celkový převodový poměr je funkcí i -tého zařazeného rychlostního stupně $N_{tf} = f(i)$, pak můžeme vyjádřit závislost spotřeby paliva na ostatních veličinách jako $\Phi_p = \Phi_p(T_e, n, i)$. Ovšem z rovnic (1.22) a (1.16) lze odvodit, že $T_e = f(v)$ a také $n = f(v)$, a proto můžeme psát:

$$\Phi_p = \Phi_p(v, i). \quad (1.26)$$

Právě tento funkcionál se v práci budeme snažit minimalizovat.

Ještě dodejme, že točivý moment motoru je veličina závislá na míře sešlápnutí plynového pedálu u vyjádřené jako:

$$u = \frac{2\alpha_t}{\pi}, \quad (1.27)$$

kde α_t představuje úhel sešlápnutí plynového pedálu, pro který budeme předpokládat, že $0 \leq \alpha_t \leq \pi/2$, a tedy pro u platí $0 \leq u \leq 1$ [14]. Mezi točivým momentem a mírou sešlápnutí plynového pedálu je poměrně složitá závislost, která je ovlivňována mnoha faktory, nebudeme ji zde tedy podrobněji rozebírat, nicméně lze díky ní vyjádřit výše zavedený funkcionál jako $\Phi_p = \Phi_p(u, n, i)$, což zde uvádíme jen pro názornost toho, že spotřeba paliva je přímo závislá na chování řidiče.

1.2.1. Brzdění motorem

Jestliže je současně zařazen rychlostní stupeň, uvolněn plynový pedál (tj. $u = 0$) a otáčky motoru jsou větší než volnoběžné, pak motor produkuje brzdňý moment způsobený svými vnitřními ztrátami, jenž se projeví na kolech vozidla jako záporná hnací síla, kterou můžeme v tento okamžik považovat za jízdní odpor. Toho lze využít např. při dlouhém klesání nebo dojezdu na křižovatku. Velikost brzdňého momentu je závislá na celé řadě

činitelů, např. zdvihovém objemu motoru, jeho kompresním poměru, teplotě provozních kapalin atd. Opět se jedná o poměrně složitou závislost, kterou není jednoduché popsat, v této práci se proto omezíme pouze na předpoklad, že brzdňý moment motoru roste společně s jeho otáčkami. Nezapomeňme, že točivý moment motoru je násoben převodovým poměrem převodovky a rozvodovky (viz. rovnice (1.7) a (1.8)), proto je velikost brzdného momentu na kolech ovlivněna také zařazeným rychlostním stupněm. Zjednodušeně lze říci, že spotřeba paliva při brzdění motorem je nulová, ale jakmile otáčky motoru klesnou pod určitou hranici danou konkrétním motorem a jeho řídicí jednotkou, je pak do motoru dodáváno nějaké malé množství paliva.

2. Model pohybu vozidla

V této kapitole bude uvedeno, jakým způsobem pracuje model vytvořený v prostředí MATLAB, který pro zadané vozidlo počítá spotřebu paliva na dané trase. Nebude zde ještě popisována implementace optimalizačních algoritmů a hledání nejvhodnějšího průběhu rychlosti a řazení, protože výpočet modelu bude demonstrován na situacích, kdy průběh rychlosti i řazení je předem nastaven.

2.1. Průběh výpočtu

Prvním krokem výpočtu je načtení informací o výškovém profilu, který je obvykle zadán pomocí bodů, charakterizovaných svou vzdáleností od počátku trasy a nadmořskou výškou. Pro vytvoření spojitého výškového profilu proto byly body proloženy kubickým splajnem. Dostatečná by byla též aproximace splajnem lineárním, ten je ale pouze třídy C^0 a při jeho derivaci (viz. níže) by vznikaly nespojitosti, proto byl využit splajn kubický třídy C^2 .

Následuje načtení konstant popisujících vozidlo a také úplné rychlostní charakteristiky motoru, která byla aproximována pomocí matlabovského nástroje *cftool*. V tomto kroku je také provedeno načtení fyzikálních konstant, jako např. tíhového zrychlení nebo hustoty vzduchu. Použité konstanty i úplná rychlostní charakteristika budou uvedeny v přílohách.

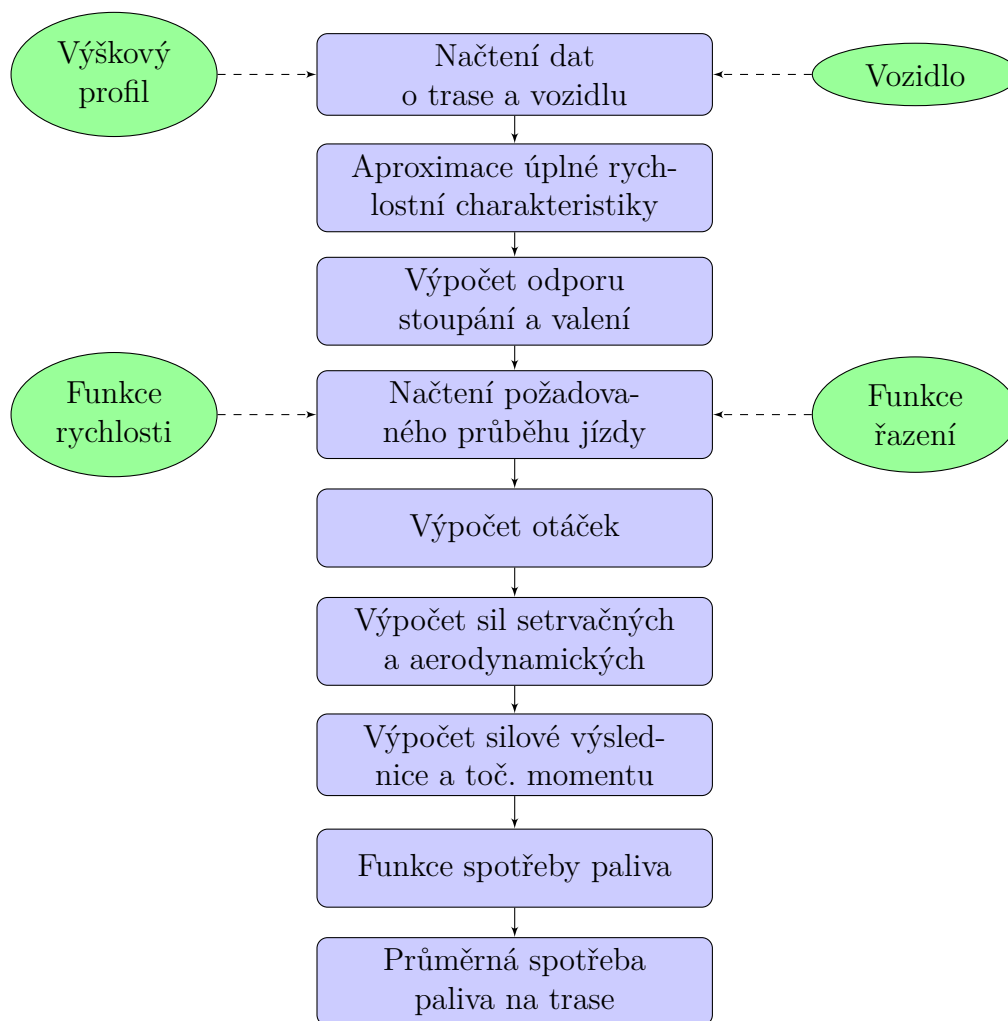
Vzhledem k tomu, že je již zadán výškový profil, můžeme vypočítat odpor valivý a odpor stoupání. Díky skutečnosti, že jsme v první kapitole předpokládali nezávislost součinitele valivého odporu na rychlosti, totiž bude valivý odpor stejný pro libovolný průběh jízdy, stejně jako odpor stoupání. Pro výpočet využijeme derivace výškového profilu a po určitých úpravách také vztahy (1.2) a (1.3).

V dalším kroku vstupují do modelu zadané funkce rychlosti a řazení. Na tyto vstupy klademe určité požadavky, např. aby kombinací vysoké rychlosti a nižšího zařazeného rychlostního stupně nedošlo k přetočení motoru, podrobněji tato omezení ale rozebereme až v poslední kapitole. Výrazným zjednodušením je to, že uvažujeme řazení zcela bez prodlevy, díky čemuž je ale funkce rychlosti dostatečně hladká. Této hladkosti využijeme při výpočtu odporu zrychlení, ve kterém vystupuje právě derivace rychlosti. Při rozjezdu vozidla z nulové rychlosti je třeba použít spojku, to je v algoritmu simulováno tak, že otáčky motoru jsou nastaveny na konstantní hodnotu vhodnou pro rozjezd a dochází k prokluzu spojky, takže otáčky za spojkou se mění a odpovídají požadované rychlosti vozidla. Poznamenejme, že točivý moment vstupující do spojky se v našem případě rovná momentu výstupnímu, více o tom např. v [17].

Ze zadaného průběhu rychlosti a řazení lze vypočíst průběh otáček dle vztahu (1.22) a také aerodynamickou sílu a odpor zrychlení podle rovnic (1.1), resp. (1.13).

V tento okamžik máme vypočteny všechny jízdní odpory a můžeme tedy vypočíst potřebnou hnací sílu podle rovnice (1.14) a z rovnice (1.15) pak dopočítat potřebný točivý moment motoru. Máme tedy funkce točivého momentu motoru a otáček v závislosti na dráze, ze kterých lze pomocí úplné rychlostní charakteristiky a případným využitím vztahu (1.17) vypočítat funkci měrné spotřeby paliva na dráze. Následuje už jen aplikace rovnic (1.18)-(1.25), pomocí kterých vypočteme průměrnou spotřebu na dané trase.

Celý výpočet je stručně zaznamenán na jednoduchém vývojovém diagramu 2.1.



Obrázek 2.1: Vývojový diagram modelu vozidla

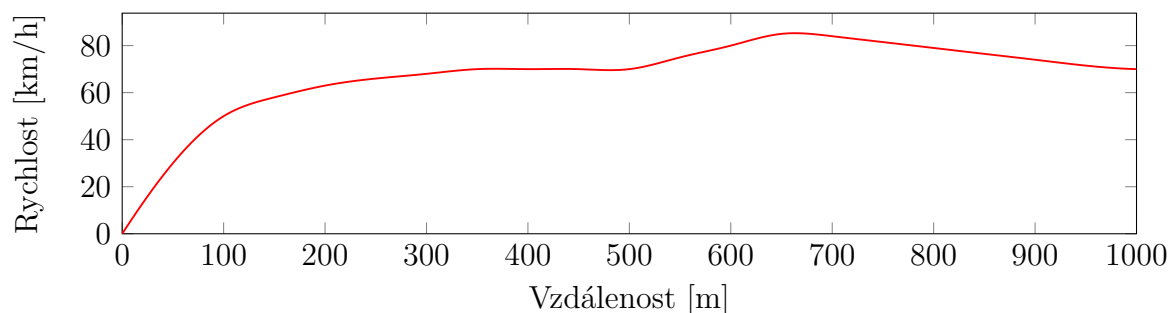
2.2. Vybrané simulace jízdy

Nyní bude uveden grafický výstup z modelu a vypočítaná průměrná spotřeba pro dvě různé situace lišící se výškovým profilem a zadaným průběhem rychlosti a řazení.

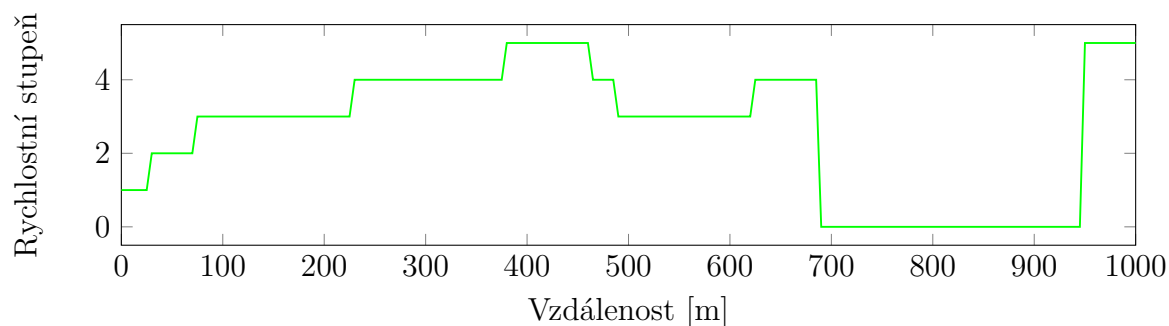
2.2.1. Jízda po rovině

Jako první byl vybrán 1 km dlouhý úsek zcela bez stoupání či klesání. Vozidlo se nejprve rozjelo na rychlost 70 km/h, kterou udržovalo a po 500 m začalo opět zrychlovat. Po

dosažení rychlosti přibližně 90 km/h pak začalo zpomalovat. Důležité je poznamenat, že v simulacích je připuštěno vyřazení rychlostního stupně, neboť vhodnou jízdou na neutrál lze dosáhnout nižší spotřeby, což bylo potvrzeno i konzultantem práce. Právě při zpomalování vozidla byl v tomto případě rychlostní stupeň vyřazen, jak je možno vidět na obrázku 2.3, kde úsek jízdy na neutrál přísluší rychlostnímu stupni 0.

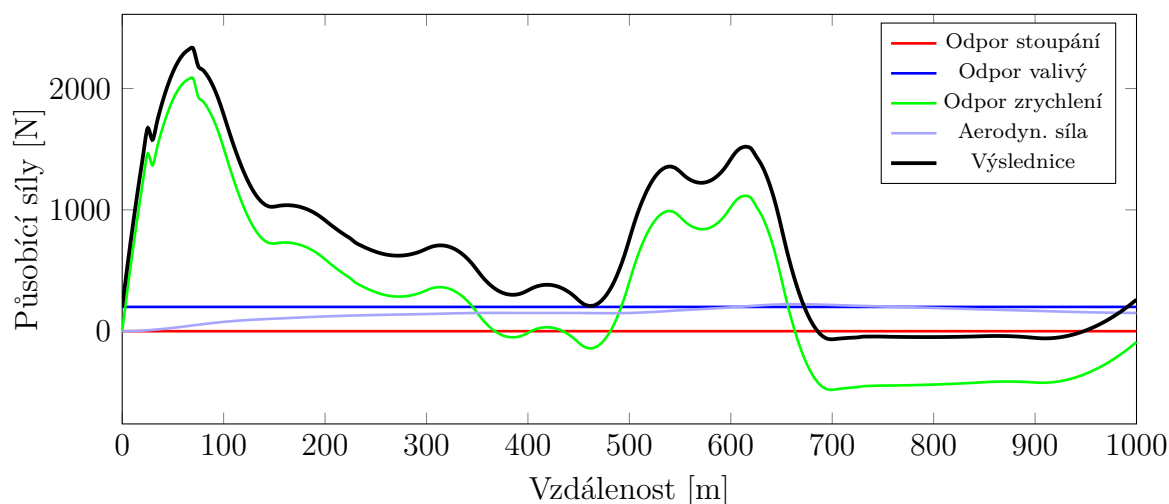


Obrázek 2.2: Průběh rychlosti

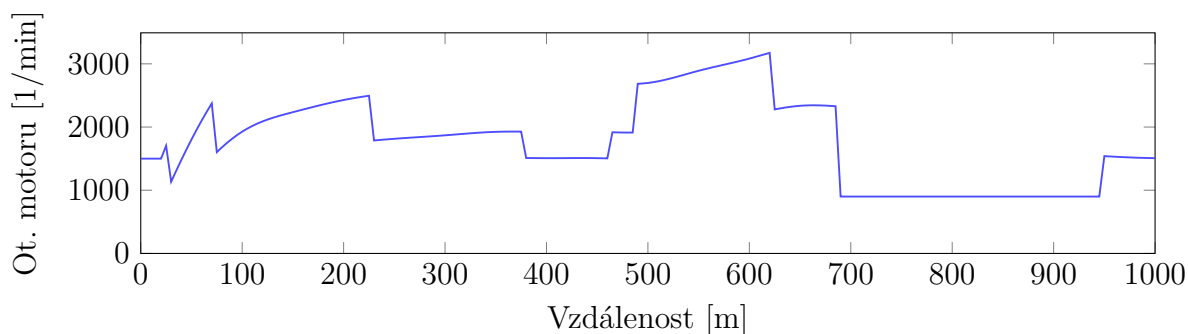


Obrázek 2.3: Průběh řazení

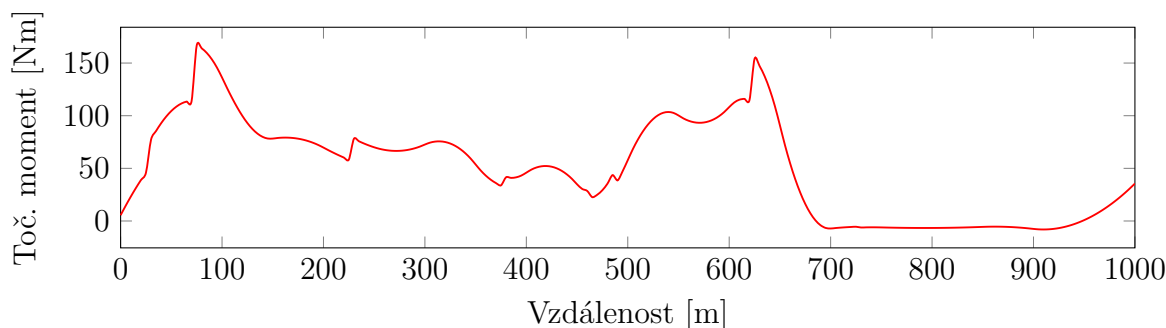
Na obrázku 2.4 jsou uvedeny síly působící na vozidlo během jízdy. Podle očekávání je odpor stoupání nulový a odpor valivý konstantní podél celé trasy. Nejvýznamnějším odporem je při této simulaci odpor zrychlení.



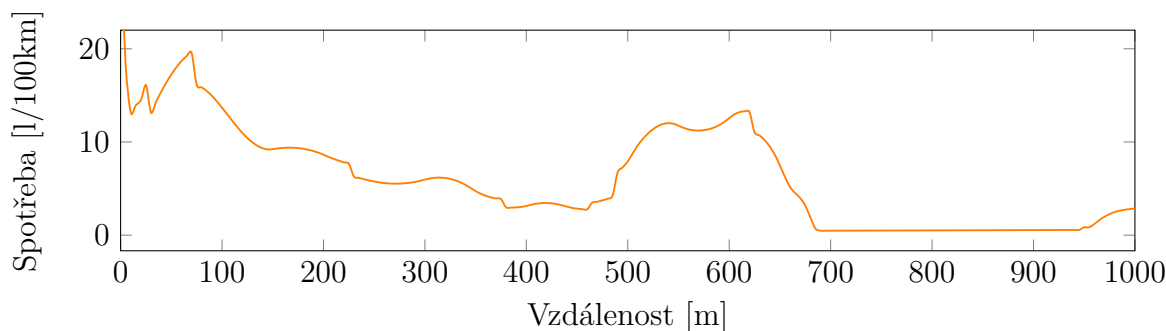
Obrázek 2.4: Síly působící na vozidlo



Obrázek 2.5: Průběh otáček



Obrázek 2.6: Průběh točivého momentu

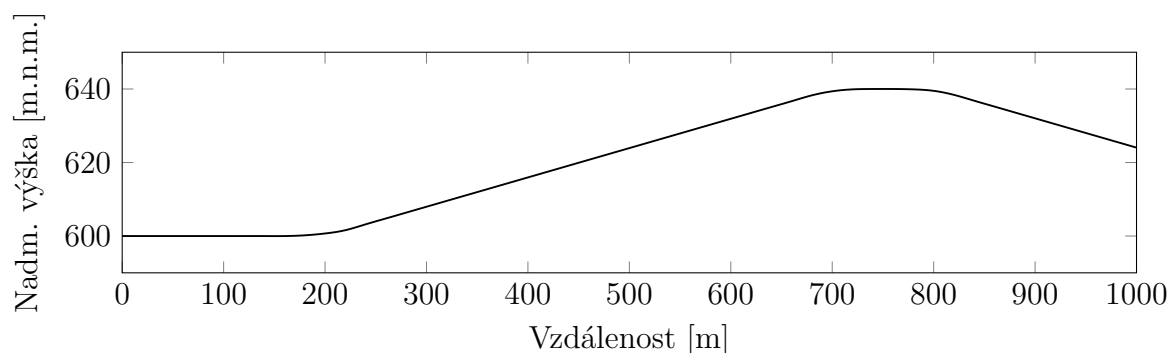


Obrázek 2.7: Průběh spotřeby paliva

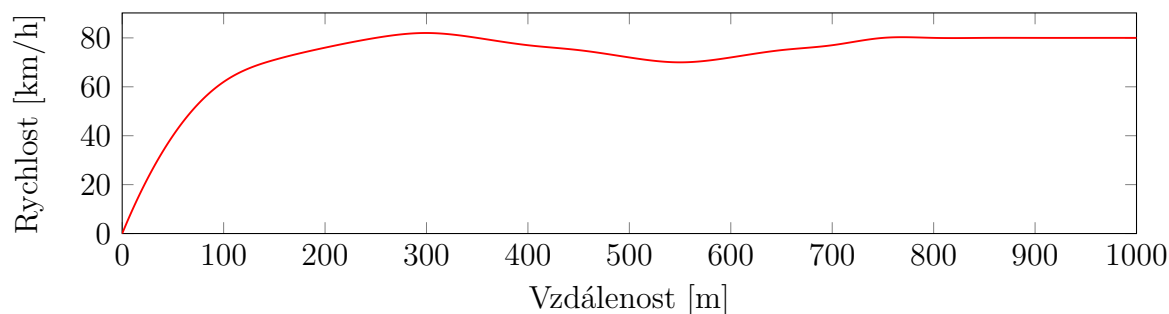
Z průběhu točivého momentu na obrázku 2.6 můžeme usoudit, že rozjezd byl ze začátku poměrně pozvolný, ale postupně rostla míra sešlápnutí plynového pedálu a tedy i moment. Vozidlo pak chvíli jelo ustálenou rychlostí a když po 500 metrech opět začalo zrychlovat, točivý moment znovu rostl. Co se průběhu spotřeby týče, můžeme si všimnout, že vykazuje podobnosti s průběhem točivého momentu, což je zcela v pořádku, neboť točivý moment indikuje míru sešlápnutí plynového pedálu. Poznamenejme, že v bodě 0, kdy je rychlost automobilu nulová, dosahuje spotřeba paliva hodnoty ∞ l/100 km (za předpokladu, že je nastartováno). Výsledná průměrná spotřeba na této trase činila 6,213 l/100 km.

2.2.2. Stoupání a sjezd

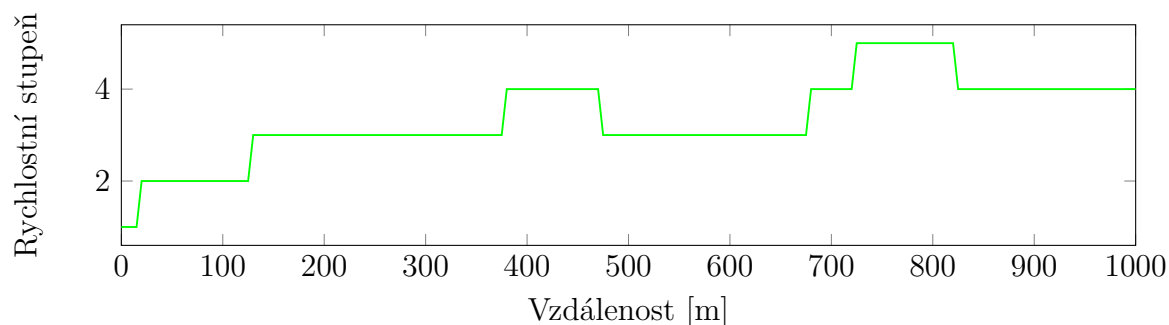
V této simulaci budeme uvažovat opět úsek o délce 1 km, ale již v něm bude zahrnut výjezd do kopce a v závěru také krátké klesání. Po rovném dvousetmetrovém úseku následuje 500 metrů stoupání o sklonu 8% (tj. $\text{tg}(\alpha) = 0,08$), pak zhruba stometrový rovný úsek a nakonec klesání o stejném sklonu jako stoupání ($\text{tg}(\alpha) = -0,08$). Na průběh rychlosti a řazení nebyly kladeny nějaké striktní požadavky, rozjezd byl poměrně razantní, aby automobil nabral před stoupáním dostatečnou rychlost, která sice po začátku stoupání mírně klesla, ale pak opět vzrostla a byla udržována na přibližně konstantní hodnotě. Grafický výstup je uveden níže.



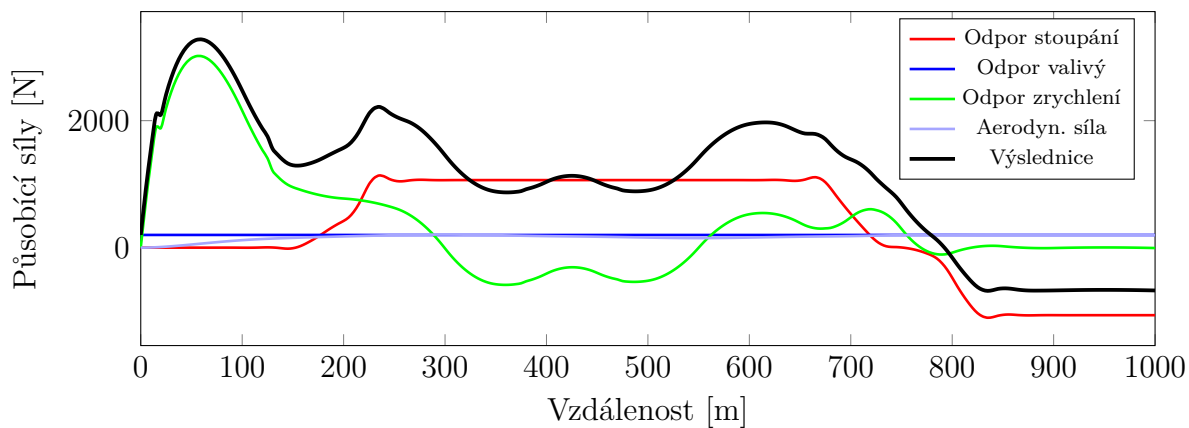
Obrázek 2.8: Výškový profil trasy



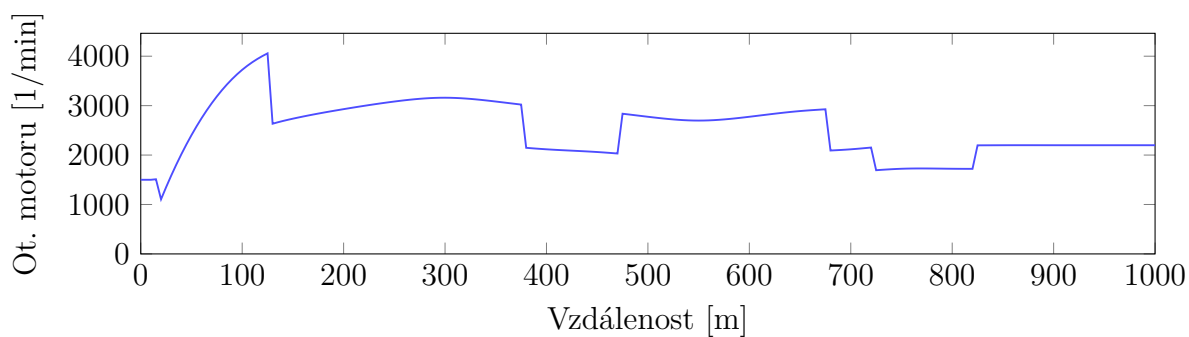
Obrázek 2.9: Průběh rychlosti



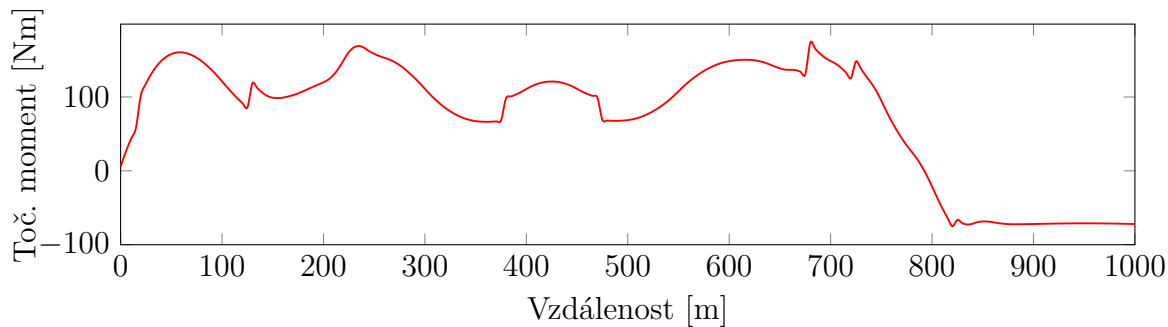
Obrázek 2.10: Průběh řazení



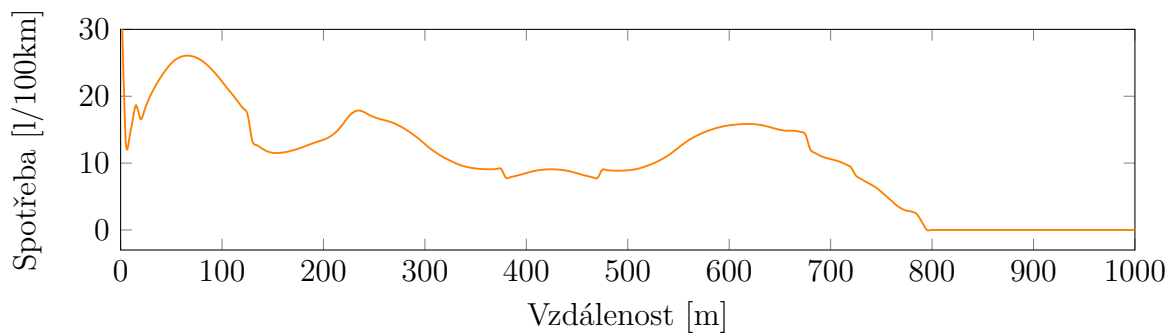
Obrázek 2.11: Síly působící na vozidlo



Obrázek 2.12: Průběh otáček



Obrázek 2.13: Průběh točivého momentu



Obrázek 2.14: Průběh spotřeby paliva

Z obrázku 2.11 můžeme pozorovat, že z počátku byl hlavním jízdním odporem odpor zrychlení, což je způsobeno poměrně rychlým rozjezdem. Nicméně po nájezdu do kopce začne mít zásadní vliv odpor stoupání: můžeme si všimnout, že oproti němu je aerodynamická síla i valivý odpor znatelně menší.

Z průběhu velikosti výslednice sil na stejném obrázku a také z průběhu točivého momentu na obrázku 2.13 můžeme usoudit, že k tomu, aby byla při klesání dodržena rychlost dle obr. 2.9, je třeba, aby hnací síla byla záporná, vůz tedy musí nějakým způsobem brzdit. V algoritmu je případ brzdění vyřešen tak, že je-li potřebný brzdný moment v absolutní hodnotě větší nebo roven brzdnému momentu produkovánému motorem v daný okamžik, je brzděno motorem, případně jsou použity brzdy (míra jejich použití není blíže specifikována). V případě, kdy potřebujeme brzdit méně, než by v daný okamžik brzdil motor, je vyřazena rychlost a brzdíme pouze brzdami. Je třeba ovšem podchytit speciální situace, např. přechod z režimu, kdy motor pohání vozidlo, do režimu, kdy motor vozidlo brzdí. V takovém případě by k vyřazení došlo pouze na velmi krátkém úseku, což není příliš reálné ani žádoucí, proto se v takovém případě nevyřazuje.

Co se spotřeby paliva týče, ta byla vlivem prudkého rozjezdu a stoupání poměrně vysoká, ovšem při klesání bylo brzděno motorem ve vyšších otáčkách, proto byla spotřeba na tomto úseku nulová. Výsledná průměrná spotřeba na celé trase činila 10,336 l/100 km.

3. Optimalizační algoritmy

Než budou rozebrány samotné heuristické algoritmy, které následně využijeme pro minimalizaci funkcionálu (1.26) zavedeného v první kapitole, bude proveden stručný úvod do optimalizace a vymezení základních pojmů.

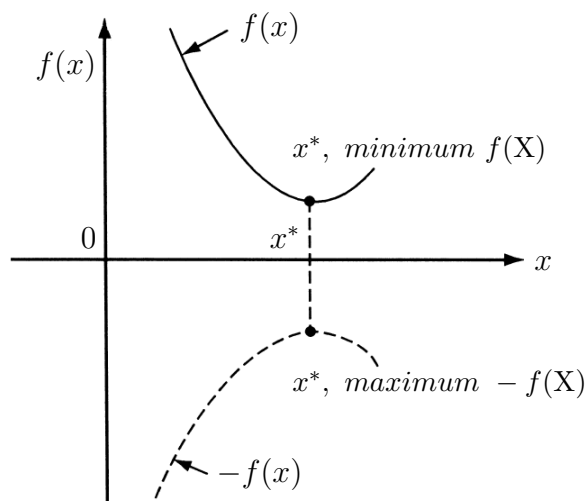
3.1. Úvod do optimalizace

Optimalizací nebo též problémem matematického programování můžeme nazvat následující úlohu:

$$\text{Najdi } X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ které minimalizuje } f_i(X) \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.1)$$

$$\text{za podmínek: } \begin{aligned} g_j(X) &\leq 0, & j &= 1, 2, \dots, J \\ h_k(X) &= 0, & k &= 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde X je n –rozměrný vektor, který nazýváme návrhovým vektorem, $f_i(X)$ je označována jako účelová funkce a $g_j(X)$ a $h_k(X)$ jsou omezující podmínky. Počet proměnných n a počet podmínek J , resp. K mezi sebou nemusí nijak souviset. Problém popsáný rovnicemi (3.1) a rovnicemi a nerovnicemi (3.2) označujeme jako problém s omezeními. V případě, že by problém nezahrnoval žádné podmínky a byl pouze ve tvaru (3.1), jednalo by se o problém bez omezení [12]. Může též nastat situace, kdy úloha nemá účelovou funkci, ale pouze omezení, a tak každé přípustné řešení je řešením optimálním [20]. Příklad, kdy nehledáme minimální, ale maximální hodnotu účelové funkce, nepředstavuje problém, neboť platí, že bod x^* , který odpovídá minimální hodnotě účelové funkce $f(X)$, zároveň odpovídá maximální hodnotě účelové funkce $-f(X)$, jak je znázorněno na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Vztah mezi problémem minimalizace a maximalizace [12]

Prvky návrhového vektoru x_1, x_2, \dots, x_n označujeme jako návrhové nebo též rozhodovací proměnné a prostor \mathbb{R}^n jimi vymezený se nazývá stavový prostor. Naopak prostor hodnot účelové funkce nazýváme prostorem řešení. Návrhové proměnné mohou být spojité nebo diskrétní a právě jejich povaha je jedním z mnoha kritérií, podle kterých můžeme optimalizační problém klasifikovat. Jsou-li všechny rozhodovací proměnné spojité, hovoříme o spojitě optimalizaci, jsou-li všechny diskrétní, hovoříme o optimalizaci diskrétní.

Dalším aspektem, dle kterého je možné optimalizační problémy dělit, je počet účelových funkcí M . V případě, že $M = 1$, máme pouze jednu účelovou funkci a hovoříme o jedno-kriteriální optimalizaci. Pokud $M > 1$, pak se jedná o optimalizaci vícekriteriální. Rozhodující též mohou být vlastnosti jednotlivých účelových funkcí a podmínky: jestliže jsou všechny účelové funkce i podmínky lineární, problém nazýváme úlohou lineárního programování¹. V případě, že je alespoň jedna účelová funkce nebo podmínka nelineární, máme co do činění s úlohou nelineárního programování.

Pro řešení optimalizačních úloh se využívá celá řada algoritmů, neboť pro jiný typ úlohy je vhodný obecně jiný algoritmus. Lze je rozdělit na deterministické a stochastické. Deterministické algoritmy mají přesný postup vedoucí k řešení a způsob, jakým řešení hledají, cesta k němu vedoucí a hodnoty návrhových proměnných budou pro každé spuštění algoritmu stejné. Naproti tomu stochastické algoritmy vždy využívají náhodnost, proto se s každým spuštěním programu bude cesta vedoucí k řešení obecně lišit a lišit se může i samotné řešení, které algoritmus našel. Heuristické algoritmy, které budou rozebírány v následující podkapitole, spadají právě do skupiny stochastických.

3.2. Heuristické algoritmy

Nelinearita a existence mnoha lokálních extrémů může zapříčinit neefektivnost běžných optimalizačních algoritmů a případně i nesprávnost jimi nalezených řešení [20]. Dalším problémem pro běžné algoritmy může být též velký počet rozhodovacích proměnných a s tím spojený neúnosně velký výpočetní čas. Typickým a často uváděným příkladem je *The travelling salesman problem*, tedy problém obchodního cestujícího. Pro daný počet měst a dané náklady za cestu mezi každými dvěma městy chceme najít nejlevnější způsob, jak projít všechna města právě jednou a vrátit se nazpět do počátečního města. Pro problém s n městy a daným počátečním bodem existuje $(n - 1)!$ možných cest [15], v případě zvažování symetrie $1/2(n - 1)!$. Kupříkladu pro $n = 100$ měst je $1/2(99)! \approx 5 \times 10^{155}$. Takovýto počet kombinací prakticky nejsou současné počítače schopny prozkoumat, a tedy ani vyřešit problém hrubou silou.

Heuristické algoritmy jsou vytvořeny právě pro řešení takovýchto problémů. Neočekáváme od nich, že naleznou řešení zcela optimální, ale pouze řešení dostatečně dobré a to v únosném čase. Jako nevýhoda se může jevit skutečnost, že nejsme schopni určit, nakolik se řešení získané heuristikou blíží řešení optimálnímu. Jejich princip je zjednodušeně řešeno založen na metodě pokusu a omylu a také na adaptaci na daný problém. Způsob hledání řešení je u mnoha algoritmů také inspirován přírodou a jejím přirozeným vývojem:

¹Programováním je v tomto případě myšleno plánování a optimalizace, nikoliv počítačové programování

zůstávají pouze nejlepší a nejrobustnější řešení, což může být analogií k evolučnímu vývoji a přežití pouze těch nejschopnějších jedinců.

V současnosti bývají někdy rozlišovány algoritmy heuristické a metaheuristické, kde předpona *meta-* má indikovat, že oproti heuristikám jsou tyto metody ještě lepší a na vyšší úrovni, nicméně rozdíl mezi oběma skupinami je malý, a proto je nebudeme rozlišovat. Nyní budou uvedeny některé známé heuristické algoritmy a jejich stručná charakteristika.

Genetické algoritmy

Na počátku algoritmus vytvoří počáteční populaci, ve které každý jedinec představuje jedno řešení daného problému. V evolučním vývoji nebo při šlechtění se prosazují jedinci, kteří mají určité žádoucí vlastnosti, analogicky k tomu algoritmus vytváří nová vhodnější řešení za pomoci genetických operátorů [10]. Nejčastěji používanými operátory jsou selekce, křížení a mutace. Účelem operátoru selekce je vybrat vhodné rodičovské páry pro vytvoření nových potomků, jejich vhodnost je nějakým způsobem určena pomocí hodnot účelové funkce. Po jejich vybrání následuje křížení jejich chromozomů a vytvoření jednoho nebo více chromozomů příslušných jejich potomkům. Operátor mutace je obvykle aplikován s nízkou pravděpodobností a slouží k především k zachování rozmanitosti populace. Za pomoci těchto (a i dalších) operátorů se chodem algoritmu populace vylepšuje a nakonec se z celé populace vybere nejlepší jedinec, který je považován za řešení celého problému.

Mravenčí algoritmy

Algoritmy jsou inspirovány snahou mravenců nalézt potravu a jejich vzájemnou komunikací pomocí feromonů. Mravenec, který nalezne potravu, označí její místo a i cestu k ní pomocí feromonů, čímž dá ostatním mravencům informaci, kde potravu nalézt. Ostatní mravenci tuto cestu následují a označí ji také svými feromony, ovšem pouze za předpokladu, že v okolí není cesta, na které je množství feromonů větší. Na základě tohoto principu vznikají nejefektivnější a nejkratší cesty. Důležitým jevem je též vypařování feromonů, které způsobuje ztrátu významnosti již nepoužívaných tras. Na konci chodu algoritmu je pak jako řešení označeno místo s největší koncentrací feromonů.

Včelí algoritmy

Podobně jako mravenci, i včely mezi sebou dokážou komunikovat pomocí feromonů, nicméně častěji se využívají algoritmy založené na komunikaci včel pomocí tzv. vrtivého tance (angl. waggle dance). Tím včela předává ostatním včelám informaci o tom, jakým směrem a v jaké vzdálenosti se potrava vyskytuje. V algoritmu je pravděpodobnost, že se za tančící včelou vydají ostatní pozorující včely, dána intenzitou jejího tance, která souvisí s množstvím nalezené potravy.

Uvedený výčet algoritmů samozřejmě není vyčerpávající, cílem bylo pouze ilustrovat, na jakých principech jsou heuristické algoritmy založeny a jak čerpají svou inspiraci z přírody. V dalším textu již budou podrobněji rozebrány algoritmy zvolené pro řešení naší optimalizační úlohy.

3.2.1. Lokální hledání (Local search)

Lokální hledání je pravděpodobně nejstarší a nejjednodušší heuristická metoda [16]. Ve stavovém prostoru se nejprve definuje relace sousednosti, která nám pro každé přípustné řešení \mathbf{x} umožní stanovit jeho „sousedství“ $S(\mathbf{x})$ [10]. Algoritmus pak začíná s nějakým počátečním řešením \mathbf{x}_0 a v každé iteraci nahrazuje dosavadní řešení řešením ze sousedství, které zlepšuje hodnotu účelové funkce. Chod algoritmu je ukončen, když všechny body ze sousedství mají horší hodnotu účelové funkce než dosavadní řešení. Výběr vhodného souseda může být proveden podle následujících postupů [16]:

- **Největší spád:** vybereme toho souseda, který nejvíce zlepší hodnotu účelové funkce. To ale může být při velkých sousedstvích časově náročné.
- **První zlepšení:** vybereme prvního souseda, který zlepší hodnotu účelové funkce.
- **Náhodný výběr:** ze sousedů zlepšujících hodnotu účelové funkce jednoho náhodně vybereme.

Zřejmou nevýhodou tohoto algoritmu je jeho neschopnost uniknout z lokálního optima (vzhledem k definovanému sousedství). Tato nevýhoda bývá odstraňována různými přístupy, například startováním algoritmu z různých počátečních bodů ve snaze získat vhodnější lokální optimum, případně připuštěním i kroků k horšímu. Právě na tomto principu je založena metoda simulovaného žíhání, která bude popsána v následujícím textu. Implementace lokálního hledání není primárním cílem této práce, výsledky dosažené tímto algoritmem budou uvedeny spíše pro srovnání s algoritmy uvedenými dále.

```
Objective function  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$ 
Initial guess  $\mathbf{x}_0$ 
while not  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \ \forall \mathbf{x} \in S(\mathbf{x}_0)$  do
    | Choose  $\mathbf{x} \in S(\mathbf{x}_0) : f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ ;
    | Put  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ 
end
Approximation of optimal solution  $\mathbf{x}_0$ .
```

Algorithm 1: Lokální hledání [10]

3.2.2. Simulované žíhání (Simulated annealing)

Algoritmus simulovaného žíhání byl publikován v roce 1983 autory S. Kirkpatrickem, C. D. Gellatem a M. P. Vecchim [20], ovšem princip, na kterém tento algoritmus pracuje, byl vytvořen již o třicet let dříve [10]. V osmdesátých letech bylo simulované žíhání využíváno zejména v kombinatorických optimalizačních problémech, postupně se dočkalo využití i při řešení spojitých optimalizačních úloh. Inspirací pro tento algoritmus je tepelný proces žíhání, jehož podstatou je ohřátí materiálu na teplotu vyšší, než je jeho teplota tání, při níž mají jeho částice dost energie, a postupné pomalé ochlazování, kterým má materiál dosáhnout svého stabilního stavu charakterizovaného minimální možnou energií

a vyloučením nedokonalostí z krystalové mřížky [6]. Velmi důležitá je u tohoto procesu právě rychlost ochlazování: v případě, že je ochlazování příliš rychlé, bude dosaženo pouze metastabilního stavu a v materiálu budou stále nedokonalosti [16].

Podobně se chová i optimalizační algoritmus: jeho podstatnou součástí je právě parametr T hrající roli teploty. Hodnota objektivní funkce představuje energii celého systému, dosažení lokálního optima je analogií k metastabilnímu stavu a dosažení optima globálního představuje stav stabilní. Jednotlivé analogie popisuje tabulka 3.1:

Tabulka 3.1: Analogie mezi reálným a simulovaným žíháním [16]

Reálný systém	Optimalizační problém
Stav systému	Řešení problému
Pozice molekul	Rozhodovací proměnné
Energie	Účelová funkce
Stabilní stav	Globální optimum
Metastabilní stav	Lokální optimum
Rychlé ochlazování	Lokální hledání
Teplota	Kontrolní parametr T
Pomalé žíhání	Simulované žíhání

Základem algoritmu simulovaného žíhání je využití náhodného vyhledávání, které s určitou pravděpodobností připouští i krok k horšímu [20]. Tato přechodová pravděpodobnost je definována vztahem

$$p = e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}, \quad (3.3)$$

kde k_B je Boltzmannova konstanta, místo které může být pro jednoduchost dosazeno $k = 1$. T je kontrolní parametr, který hraje roli teploty, a ΔE představuje změnu energie v daném kroku. Nejjednodušším způsobem, jak propojit změnu energie se změnou účelové funkce, může být vztah

$$\Delta E = \gamma \Delta f, \quad (3.4)$$

kde také můžeme pro jednoduchost volit $\gamma = 1$. K tomu, abychom určili, zda daný krok k horšímu bude akceptován, využijeme náhodné číslo r z rovnoměrného rozdělení $U(0, 1)$. Krok k horšímu je akceptován, když

$$p = e^{-\frac{\Delta f}{T}} > r. \quad (3.5)$$

Při startu algoritmu je parametr T nastaven na vysokou hodnotu, při které je pravděpodobnost přijetí horšího řešení vyšší, jak lze usoudit ze vztahu (3.5). S tím, jak teplota klesá, se pravděpodobnost přijetí horšího řešení snižuje. Tento vývoj má analogii v tom, že při vysoké teplotě se částice v zahřátém materiálu mohou vůči sobě volně pohybovat, ale s klesající teplotou se jejich pohyb omezuje. Velmi důležitým je nastavení počáteční teploty v algoritmu. V případě, že je teplota příliš vysoká ($T \rightarrow \infty$) je pro danou změnu Δf pravděpodobnost $p \rightarrow 1$, takže téměř všechna řešení jsou akceptována. Naopak v případě, že T bude mít příliš nízkou hodnotu ($T \rightarrow 0$), bude krok k horšímu jen zřídka akceptován,

neboť $p \rightarrow 0$. K tomu, abychom počáteční teplotu v algoritmu správně nastavili, využijeme informace o účelové funkci. Jestliže známe maximální změnu, které může účelová funkce dosáhnout ($\max(\Delta f)$), pak pro danou pravděpodobnost p_0 nastavíme počáteční teplotu dle vztahu

$$T_0 \approx -\frac{\max(\Delta f)}{\ln(p_0)}. \quad (3.6)$$

Pokud ovšem tuto informaci nemáme k dispozici, pak zvolíme jiný přístup: začneme provádět výpočty s velmi vysokou počáteční teplotou, kterou rychle snižujeme, dokud zhruba 50% až 60% kroků k horšímu není akceptováno a následně využijeme tuto teplotu jako novou počáteční teplotu T_0 pro nové pomalé chlazení [20].

Co se konečné teploty T_f týče, teoreticky by měla být nulová, ovšem prakticky se jako konečná teplota bere kladné číslo blízké nule, $T_f = 10^{-10} \sim 10^{-5}$.

Další důležitou otázkou je, jak snižovat teplotu během chodu algoritmu. Bývají voleny různé přístupy, z nichž často užívané jsou lineární a geometrický. V případě lineárního chladičího plánu se teplota upravuje dle následujícího vztahu:

$$T = T_0 - \beta t, \quad (3.7)$$

kde t hraje roli času. Parametr β by měl být určen tak, aby $T \rightarrow 0$, když $t \rightarrow t_f$, kde t_f je konečný čas.

Geometrický chladičí plán je zřejmě nejpoužívanější a má tvar:

$$T = T_0 \alpha^t, \quad t = 1, 2, \dots, t_f. \quad (3.8)$$

V tomto vztahu vystupuje parametr α , který volíme $0 < \alpha < 1$. Výhodou tohoto postupu je, že $T \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow \infty$, a tím pádem není třeba specifikovat maximální počet iterací. Zkušenosti ukazují, že hodnota parametru α by se měla pohybovat v intervalu $(0,5; 0,99)$ [16]. Nejčastěji se volí hodnota parametru $\alpha = 0,7 \sim 0,95$ [20].

Méně používaným chladičím plánem je logaritmický

$$T = \frac{T_0}{\log(t)}, \quad (3.9)$$

který je příliš pomalý na to, aby byl prakticky užíván, ale má tu vlastnost, že zaručeně konverguje ke globálnímu optimu [16].

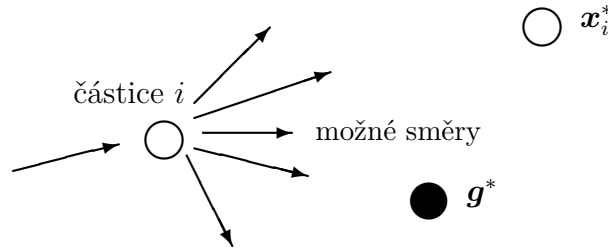
Chod celého algoritmu je uveden v pseudokódu níže.

Objective function $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$
Initialize initial temperature T_0 and initial guess $\mathbf{x}^{(0)}$
Set final temperature T_f and max number of iterations N
Define cooling schedule $T \mapsto \alpha T$, ($0 < \alpha < 1$)
while ($T > T_f$ and $n < N$) **do**
 Move randomly to new locations: $x_{n+1} = x_n + \text{randn}$
 Calculate $\Delta f = f_{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}) - f_n(\mathbf{x}_n)$
 Accept the new solution if better
 if *not improved* **then**
 Generate a random number r
 Accept if $p = \exp[-\Delta f/T] > r$
 end
 Update the best \mathbf{x}_* and f_*
 $n = n+1$
end

Algorithm 2: Simulované žíhání [20]

3.2.3. Optimalizace hejnem částic (Particle swarm optimization)

Tento algoritmus byl vyvinut v roce 1995 autory J. Kennedym a R. Eberhartem a původně byl vytvořen pro řešení spojitých optimalizačních problémů [16]. Řadí se do kategorie hejnových algoritmů, protože napodobuje chování hejna ptáků nebo ryb, které se snaží nalézt místo s dostatkem potravy. Má určité podobnosti s genetickými nebo mravenčími algoritmy, ale je mnohem jednodušší, neboť nevyužívá genetické operátory ani feromony. V algoritmu je hejno tvořeno n částicemi, které se pohybují v p -rozměrném stavovém prostoru. Každá částice i je řešením optimalizačního problému a v daném čase t je charakterizována vektorem \mathbf{x}_i^t . Pohyb částic je řízen dvěma složkami: stochastickou a deterministickou. Každá částice je přitahována k dosavadnímu nejlepšímu řešení dosaženému všemi částicemi \mathbf{g}^* , dále ke svému vlastnímu doposud nejlepšímu řešení \mathbf{x}_i^* , ale přitom má i tendenci pohybovat se náhodně [20]. Částice tedy mezi sebou sdílejí informaci o doposud nejlepším nalezeném řešení. Pohyb i -té částice je naznačen na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Naznačení pohybu i -té částice [20]

Princip, podle kterého se částice pohybuje, bude nyní popsán přesněji. Změnu pozice i -té částice lze vyjádřit vztahem

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t + \mathbf{v}_i^{t+1}, \quad (3.10)$$

kde vektory \mathbf{x}_i^t , resp. \mathbf{x}_i^{t+1} představují pozici částice v čase t , resp. $t+1$ a vektor \mathbf{v}_i^{t+1} má roli vektoru rychlosti. Tento vektor je určen jako

$$\mathbf{v}_i^{t+1} = \mathbf{v}_i^t + \alpha \boldsymbol{\epsilon}_1 \odot [\mathbf{g}^* - \mathbf{x}_i^t] + \beta \boldsymbol{\epsilon}_2 \odot [\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_i^t], \quad (3.11)$$

kde $\boldsymbol{\epsilon}_1$ a $\boldsymbol{\epsilon}_2$ jsou náhodné vektory, jejichž každá složka nabývá hodnoty mezi 0 a 1. Symbol \odot představuje součin po složkách a α a β jsou parametry vyjadřující míru vlivu globálně nejlepšího dosavadního řešení \mathbf{g}^* , resp. nejlepšího dosavadního řešení \mathbf{x}_i^* dosaženého i -tou částicí. Tyto konstanty bývají obvykle voleny jako $\alpha \approx \beta \approx 2$. Počáteční rychlost částice může být brána jako nulová, tedy $\mathbf{v}_i^{t=0} = 0$. Ačkoli rychlosti \mathbf{v}_i mohou nabývat v podstatě libovolných hodnot, jsou obvykle omezeny v nějakém rozmezí $[0; \mathbf{v}_{max}]$.

Výše uvedený základní algoritmus lze také vhodně modifikovat za účelem zrychlení konvergence. Významnou takovou modifikací je zavedení funkce setrvačnosti $\theta(t)$, kterou se upraví vztah pro výpočet rychlosti

$$\mathbf{v}_i^{t+1} = \theta \mathbf{v}_i^t + \alpha \boldsymbol{\epsilon}_1 \odot [\mathbf{g}^* - \mathbf{x}_i^t] + \beta \boldsymbol{\epsilon}_2 \odot [\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_i^t], \quad (3.12)$$

kde θ nabývá hodnot mezi 0 a 1. Větší hodnoty způsobují, že částice hledají optimální řešení globálně, nižší hodnoty naopak zapříchují, že částice zkoumají zejména své okolí [16].

Další možností je odstranění nejlepšího dosavadního řešení \mathbf{x}_i^* nalezeného i -tou částicí. Význam tohoto řešení totiž spočívá v zajištění různorodosti v nalezených řešeních, ovšem této různorodosti může být též dosaženo užitím náhodnosti [20]. Proto zjednodušená verze algoritmu využívá pouze globálně dosažené nejlepší řešení \mathbf{g}^* a výpočet vektoru rychlosti se provádí dle vztahu

$$\mathbf{v}_i^{t+1} = \mathbf{v}_i^t + \alpha(\boldsymbol{\epsilon} - 1/2) + \beta(\mathbf{g}^* - \mathbf{x}_i^t), \quad (3.13)$$

kde $\boldsymbol{\epsilon}$ je náhodný vektor, jehož složky opět nabývají hodnot mezi 0 a 1. Druhý člen pravé strany lze též nahradit výrazem $\alpha \boldsymbol{\epsilon}_n$, kde $\boldsymbol{\epsilon}_n$ je číslo z normovaného normálního rozdělení $N(0, 1)$.

V zájmu zjednodušení pak lze namísto vztahů (3.10) a (3.13) zapsat změnu pozice pouze jednou rovnicí

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = (1 - \beta)\mathbf{x}_i^t + \beta\mathbf{g}^* + \alpha(\boldsymbol{\epsilon} - 1/2). \quad (3.14)$$

V případě této modifikace jsou pak hodnoty parametrů brány obvykle jako $\alpha \approx 0,2$ a $\beta \approx 0,5$, ovšem parametry by měly být nějakým způsobem úměrné rozsahu stavového prostoru.

Poslední možnou modifikací, která bude zmíněna, je možnost postupně redukovat náhodnost. Toho může být docíleno například pomocí funkce

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\gamma t} \quad (3.15)$$

nebo také

$$\alpha = \alpha_0 \gamma^t, \quad (0 < \gamma < 1), \quad (3.16)$$

kde $\alpha_0 \approx 0,5 \sim 1$ je počáteční hodnota parametru a t hraje roli počtu iterací nebo časových kroků. Pro redukci náhodnosti lze ovšem použít i jiné klesající funkce [19].

Na závěr bude ještě uveden pseudokód popisující jednotlivé kroky algoritmu:

```
Objective function  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$ 
Initialize locations  $\mathbf{x}_i$  and velocity  $\mathbf{v}_i$  of  $n$  particles
Find  $\mathbf{g}^*$  from  $\min\{f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_n)\}$  (at  $t = 0$ )
while criterion do
     $t = t + 1$  (pseudo time or iteration counter)
    for loop over all  $n$  particles and all  $p$  dimensions do
        Generate new velocity  $\mathbf{v}_i^{t+1}$  using equation (3.11)
        Calculate new locations  $\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i^{t+1}$ 
        Evaluate objective function at new locations  $\mathbf{x}_i^{t+1}$ 
        Find the current best for each particle  $\mathbf{x}_i^*$ 
    end
    Find the current global best  $\mathbf{g}^*$ 
end
Output the final results  $\mathbf{x}_i^*$  and  $\mathbf{g}^*$ 
```

Algorithm 3: Optimalizace hejnem částic [20]

3.2.4. Algoritmus světlušek (Firefly algorithm)

Posledním z algoritmů, které v této práci budou využity, je algoritmus světlušek. Jedná se o relativně mladý algoritmus, který byl vyvinut X. S. Yangem v roce 2007. Inspirací pro tento algoritmus je svit světlušek, díky kterému se navzájem mohou přitahovat a také lákat potenciální kořist. Dalším důležitým prvkem, který se vyskytuje v algoritmu, je také absorpce světla vyzařovaného světluškami. Samotný algoritmus se řídí třemi idealizovanými pravidly [20]:

- Všechny světlušky jsou bezpohlavní, takže jsou přitahovány bez ohledu na jejich pohlaví (neboť není rozlišeno).
- Přitažlivost k dané světlušce je přímo úměrná její světelné intenzitě. Světluška s menší intenzitou je přitahována ke světlušce s intenzitou vyšší a čím více roste vzdálenost mezi nimi, tím je vzájemná přitažlivost menší. Světluška s největší světelnou intenzitou se pohybuje zcela náhodně.
- Intenzita dané světlušky je určena nebo ovlivněna účelovou funkcí.

Důležitým prvkem ovlivňujícím chod celého algoritmu je to, jak se mění intenzita světlušek a také, jakým způsobem je určena přitažlivost k dané světlušce. V nejjednodušším případě můžeme předpokládat, že světelná intenzita I je přímo úměrná účelové funkci $I(\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x})$. Přitažlivost β mezi světluškami i a j ale závisí na vzdálenosti r_{ij} mezi nimi, navíc intenzita klesá s rostoucí vzdáleností r od zdroje a světlo je také pohlcováno prostředím. V nejjednodušším případě se světelná intenzita řídí rovnicí

$$I(r) = \frac{I_s}{r^2}, \quad (3.17)$$

kde I_s je světelná intenzita u zdroje. Pro dané prostředí a daný koeficient absorpce γ se světelná intenzita mění dle vztahu

$$I = I_0 e^{-\gamma r}, \quad (3.18)$$

kde I_0 je původní světelná intenzita. Ve snaze odstranit singularitu v bodě $r = 0$ ve zlomku rovnice (3.17) se výsledná světelná intenzita zahrnující vliv jak vzdálenosti od zdroje, tak absorpce prostředím, aproximuje rovnicí

$$I(r) = I_0 e^{-\gamma r^2}. \quad (3.19)$$

Dle výše uvedených pravidel je přitažlivost k dané světlušce úměrná světelné intenzitě, kterou mohou pozorovat ostatní světlušky, proto nyní můžeme definovat přitažlivost jako

$$\beta = \beta_0 e^{-\gamma r^2}, \quad (3.20)$$

kde β_0 je přitažlivost při $r = 0$. Je nicméně vhodné poznamenat, že jako $\beta(r)$ může být volena libovolná klesající funkce v tomto zobecněném tvaru

$$\beta = \beta_0 e^{-\gamma r^m}, \quad (m \geq 1). \quad (3.21)$$

Uvedme ještě, že vzdálenost mezi dvěma světluškami i a j majícími souřadnice \mathbf{x}_i , resp. \mathbf{x}_j se vypočte dle vztahu

$$r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_{i,k} - x_{j,k})^2}. \quad (3.22)$$

Pohyb i -té světlušky, která je přitahována k jasnější světlušce j , je dán předpisem

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t + \beta_0 e^{-\gamma r_{ij}^2} (\mathbf{x}_j^t - \mathbf{x}_i^t) + \alpha \boldsymbol{\epsilon}_i^t, \quad (3.23)$$

kde druhý člen má roli přitažlivosti ke světlušce j a třetí člen má roli náhodnosti, ve kterém je α jako parametr a $\boldsymbol{\epsilon}_i$ je vektor náhodných čísel daných normálním nebo rovnoměrným rozdělením [19]. Při implementaci je důležitá správná volba parametrů. Ve většině případů může být voleno $\beta_0 = 1$ a $\alpha \in \langle 0; 1 \rangle$. V případě, že $\beta_0 = 0$, rovnice (3.23) přejde na rovnici popisující algoritmus náhodné procházky. Důležitá je také volba parametru γ ovlivňující rychlost konvergence a celkové chování algoritmu. Teoreticky lze brát $\gamma \in \langle 0; \infty \rangle$, ale ve většině aplikací se hodnota tohoto parametru pohybuje v rozmezí od

0,1 do 10. Pro vysvětlení toho, jak hodnota γ ovlivňuje chod algoritmu, lze uvažovat dva případy: $\gamma \rightarrow 0$ a $\gamma \rightarrow \infty$. Pro $\gamma \rightarrow 0$ je přitažlivost $\beta = \beta_0$, což odpovídá tomu, že se světelná intenzita se vzdáleností od zdroje nezmenšuje. Světluška je tedy vidět odkudkoliv, což je vhodné pro nalezení jediného (obvykle globálního) optima. V případě, že $\gamma \rightarrow \infty$ bude přitažlivost ostatních světlušek k dané světlušce téměř nulová. Tento případ si lze představit jako prostředí s velmi hustou mlhou, kde světlušky na sebe navzájem nevidí, a proto se pohybují zcela náhodně. Toto odpovídá algoritmu náhodného prohledávání.

Stejně jako u optimalizace hejnem částic, i v tomto případě lze algoritmus vhodným způsobem modifikovat. Nabízí se postupné snižování vlivu náhodnosti, čímž lze zlepšit kvalitu nalezených řešení. Lze použít například vztah

$$\alpha = \alpha_\infty + (\alpha_0 + \alpha_\infty)e^{-t}, \quad (3.24)$$

kde $t \in \langle 0; t_{max} \rangle$ hraje roli času podle iterací a t_{max} je maximální počet iterací. α_0 je počáteční hodnota parametru α a α_∞ je hodnota konečná. Lze také použít funkci podobnou geometrickému plánu chlazení u simulovaného žíhání

$$\alpha = \alpha_0 \theta^t, \quad (3.25)$$

kde $\theta \in (0; 1)$ je konstanta redukující náhodnost.

Algoritmus světlušek se ukázal být jako poměrně efektivní ve srovnání s genetickými algoritmy a optimalizací hejnem částic, což dokládá článek [18], kde byly všechny tři algoritmy srovnávány na několika testovacích funkcích.

Na závěr je opět uveden pseudokód naznačující, jak algoritmus pracuje.

```

Objective function  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$ 
Generate initial population of fireflies  $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )
Light intensity  $I_i$  at  $\mathbf{x}_i$  is determined by  $f(\mathbf{x}_i)$ 
Define light absorption coefficient  $\gamma$ 
while  $t < MaxGeneration$  do
    for  $i = 1 : n$  all  $n$  fireflies do
        for  $j = 1 : n$  all  $n$  fireflies (inner loop) do
            if  $I_i < I_j$  then
                | Move firefly  $i$  towards  $j$ 
            end
            Vary attractiveness with distance  $r$  via  $\exp[-\gamma r]$ 
            Evaluate new solutions and update light intensity
        end
    end
    Rank the fireflies and find the current global best  $\mathbf{g}_*$ 
end
Postprocess results and visualization

```

Algorithm 4: Algoritmus světlušek [20]

3.3. Penalizační funkce

Často používanou metodou pro optimalizaci s omezujícími podmínkami je užití penalizační funkce, která převádí problém s omezeními na problém bez omezení. Jejím principem je přidání penalizačního členu k hodnotě účelové funkce v případě, že jsou narušeny omezující podmínky. Pokud bychom uvažovali problém s omezeními

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \quad (3.26)$$

$$\text{za podmíněk: } \begin{aligned} g_j(\mathbf{x}) &\leq 0, & j &= 1, 2, \dots, J \\ h_k(\mathbf{x}) &= 0, & k &= 1, 2, \dots, K, \end{aligned} \quad (3.27)$$

pak pro transformaci na problém bez omezení bychom změnili účelovou funkci na tvar

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}) \quad (3.28)$$

kde $p(\mathbf{x})$ je penalizační člen určený vztahem

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J \nu_j \max(0, g_j(\mathbf{x}))^2 + \sum_{k=1}^K \mu_k |h_k(\mathbf{x})|, \quad (3.29)$$

kde $\mu_k > 0$, $\nu_j > 0$ jsou penalizační konstanty [19]. Podmínky jsou tedy zahrnuty v účelové funkci a je splněna žádaná vlastnost, že v případě $g_j \leq 0$ bude první člen ze vztahu (3.29) nulový a když $g_j > 0$, tak bude kladný. Stejně tak pro $h_k = 0$ bude druhý člen vztahu (3.29) nulový a v opačném případě kladný.

Používanou penalizační funkcí je také

$$\Pi(\mathbf{x}, \mu, \nu) = f(\mathbf{x}) + \mu \sum_{k=1}^K H_k[h_k(\mathbf{x})] h_k^2(\mathbf{x}) + \nu \sum_{j=1}^J H_j[g_j(\mathbf{x})] g_j^2(\mathbf{x}), \quad (3.30)$$

kde je pro jednoduchost $\mu = \mu_k$ pro $\forall k$ a $\nu = \nu_j$ pro $\forall j$. Důležitá je správná volba těchto koeficientů. Pro většinu aplikací můžeme položit $\mu, \nu = 10^3 \sim 10^{15}$ [19]. $H_k[h_k(\mathbf{x})]$ a $H_j[g_j(\mathbf{x})]$ jsou funkce, pro které platí, že $H_k[h_k(\mathbf{x})] = 1$, když $h_k(\mathbf{x}) \neq 0$ a $H_k[h_k(\mathbf{x})] = 0$, když $h_k(\mathbf{x}) = 0$. V druhém případě je $H_j[g_j(\mathbf{x})] = 0$, když $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$ a $H_j[g_j(\mathbf{x})] = 1$, když $g_j(\mathbf{x}) > 0$.

4. Implementace optimalizačních algoritmů

V této kapitole budou uvedeny výsledky dosažené implementací uvedených heuristických algoritmů a také bude naznačeno, jak řešení optimalizační úlohy probíhá. Ještě před tím je ale třeba úlohu řádně formulovat.

4.1. Formulace optimalizační úlohy

Matematicky a s použitím pojmů uvedených na začátku třetí kapitoly lze úlohu minimalizace funkcionálu (1.26) popsat takto:

$$\min \Phi_p(v, i) = \frac{1}{s_1 - s_0} \int_{s_0}^{s_1} M_p(v(s), i(s)) \, ds \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} v(s_0) &= v_0 \\ i(s_0) &= i_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} g_j(v, i) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \\ h_k(v, i) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, K. \end{aligned}$$

Cílem je tedy minimalizovat funkcionál Φ_p závislý na funkcích $v(s), i(s)$ na intervalu $\langle s_0; s_1 \rangle$, který představuje danou trasu. První dvojice podmínek z (4.2) jsou podmínky počáteční, na začátku trasy tedy vždy bude předepsán výchozí stav daný rychlostí vozidla a zařazeným rychlostním stupněm. Druhá dvojice podmínek představuje vliv rychlostních omezení na trase, kterými se primárně omezuje rychlost vozidla, ovšem z těchto omezení mohou plynout i podmínky na zařazený rychlostní stupeň: např. pokud by byla nejvyšší dovolená rychlost na trase 40 km/h, pravděpodobně by nebylo dovoleno řadit pátý rychlostní stupeň, apod. Tuto dvojici podmínek lze teoreticky uvažovat na libovolném podintervalu intervalu $\langle s_0; s_1 \rangle$, ovšem prakticky se omezíme jen na vhodné spojitě podinterval.

4.2. Průběh výpočtu

1. Načtení bodů trasy, parametrů vozidla a fyzikálních konstant tak, jak to bylo uvedeno v kapitole 2.
2. Výpočet funkcí valivého odporu a odporu stoupání v závislosti na dráze, neboť jsou podle námi zavedených předpokladů nezávislé na průběhu rychlosti automobilu.
3. Načtení zadaných rychlostních omezení
4. Inicializace parametrů heuristického algoritmu (např. v případě simulovaného žíhání: chladičového parametru, počáteční teploty, konečné teploty atd.)

5. Náhodné vygenerování počátečního řešení. Řešení je tvořeno funkcí rychlosti $v = f(s)$ a funkcí řazení $i = f(s)$. Obě funkce jsou určeny vhodným počtem „řídících bodů“, kterými je pak proložen kubický splajn představující danou funkci. V případě řazení, jehož obor hodnot je diskrétní, dochází k zaokrouhlování hodnot funkce na celá čísla. Tím došlo k převedení úlohy, která má spojité i diskrétní proměnné na úlohu, kde jsou všechny proměnné spojité. Při volbě počtu bodů bylo třeba učinit kompromis mezi rychlostí výpočtu a dostatečnou přesností: s rostoucím počtem bodů se zvyšuje přesnost, ale také výpočetní čas. Poznamenejme, že body jsou generovány do množiny, která je omezena rychlostními omezeními z předchozího bodu, to ale ještě neznamená, že řešení bude přípustné, neboť ve výpočtu vystupují ještě další omezení (viz. níže).
6. Výpočet hodnoty účelové funkce a vyhodnocení, zda byla splněna následující omezení:

- V případě, že nejsou podél celé trasy omezení na maximální a minimální dovolenou rychlost, je třeba požadovat, aby rychlost nebyla záporná, případně nulová (pomineme-li eventuálně počáteční bod, kdy se vozidlo rozjíždí z klidu). Naopak maximální dovolenou rychlost vypočteme ze vztahu

$$v_{max} = \frac{7, 2\pi r_d n_{max}}{60 N_{tf}}, \quad (4.3)$$

kde n_{max} jsou maximální otáčky motoru.

- Požadujeme, aby během jízdy vlivem prudkého rozjezdu nebo brzdění nedocházelo k prokluzu kol na vozovce. Tuto podmínku vyjádříme omezením maximálního možného zrychlení podle [4]:

$$|a| \leq 2g, \quad (4.4)$$

kde g je tíhové zrychlení. V případě brzdění je tento požadavek zbytečně přísný, nicméně vzhledem k povaze úlohy pochopitelný. Poznamenejme, že podmínka (4.4) platí za předpokladu, že se vozidlo pohybuje po suché asfaltové vozovce.

- Motor je třeba udržovat v určitém rozsahu otáček, který zjistíme z úplné rychlostní charakteristiky. Proto požadujeme, aby

$$n_{min} \leq n(s) \leq n_{max}. \quad (4.5)$$

Výjimku tvoří pouze režim, kdy je vyřazen rychlostní stupeň, otáčky motoru jsou pak volnoběžné a obvykle nižší než n_{min} .

- Jestliže je řídícími body zadán nějaký průběh rychlosti a řazení, je třeba ověřit, zda má vozidlo dostatek točivého momentu na to, aby mohl být splněn. Křivku maximálního točivého momentu $T_{e,max} = f(n)$ opět zjistíme z úplné rychlostní charakteristiky a budeme tedy požadovat

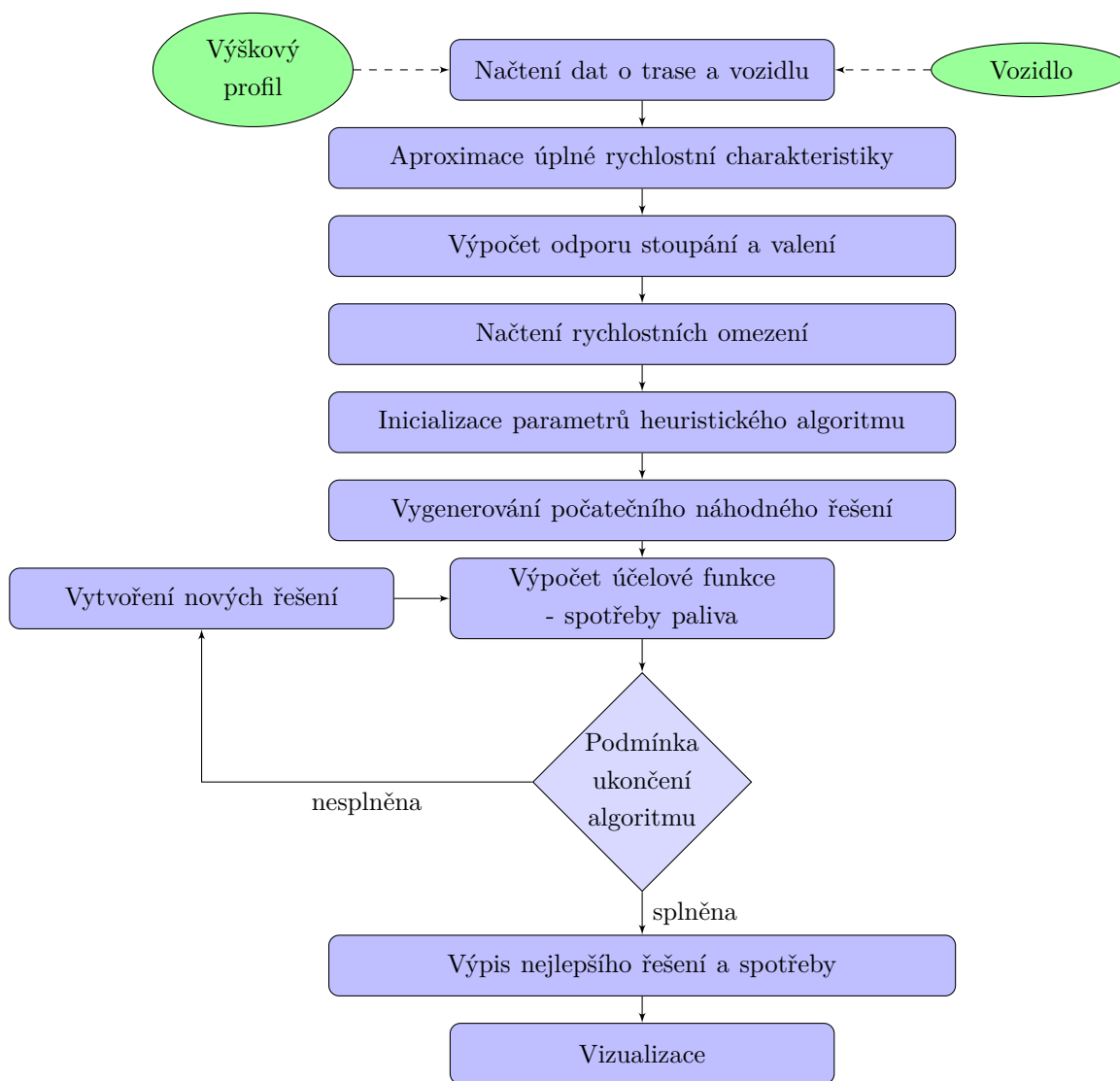
$$T_e(n) \leq T_{e,max}(n). \quad (4.6)$$

- Pochopitelně také požadujeme, aby byla splněna všechna námi zadaná rychlostní omezení.

V případě, že nějaké omezení není dodrženo, je k účelové funkci připočtena nějaká vhodná penalizace tak, jak je uvedeno v předchozí kapitole.

7. Na základě získané hodnoty, resp. hodnot účelové funkce algoritmus generuje další řešení, která opět vyhodnocuje. Tento proces se opakuje, dokud není splněna podmínka pro ukončení algoritmu.
8. Je vypsáno nejlepší dosažené řešení, k němu příslušná hodnota účelové funkce a jednotlivé veličiny jsou vykresleny do grafů.

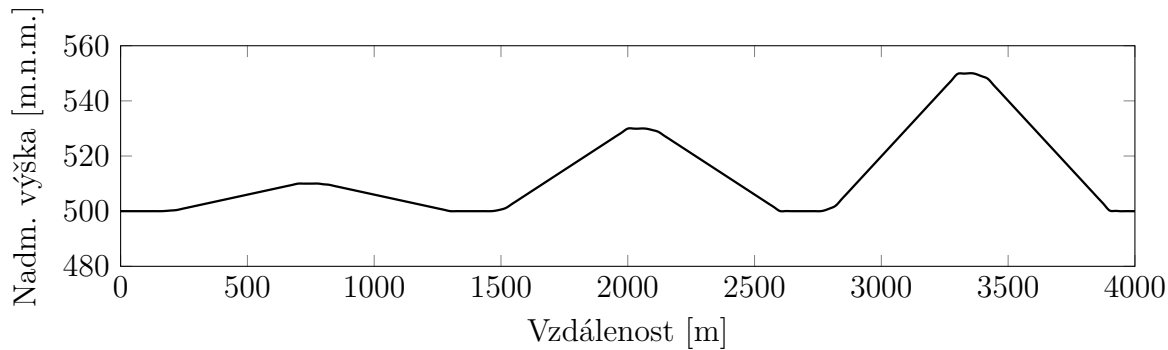
Chod modelu je stručně popsán na vývojovém diagramu níže.



Obrázek 4.1: Vývojový diagram optimalizačního algoritmu

4.3. Výsledky

Všechny čtyři vybrané algoritmy byly testovány na 4 km dlouhé trase, ve které se nacházela 3 stoupání a klesání, viz. obr. 4.2. Úvodních 200 metrů určených pro rozjezd automobilu bylo bez sklonu a pak následovalo stoupání o sklonu 2%, rovný stometrový úsek a klesání taktéž se sklonem 2%. Po dalším stometrovém rovném úseku se situace opakovala, ovšem sklon stoupání i klesání činil 6%. Sklon třetího stoupání a klesání byl 10%. Předpokladem bylo, že se jedná o úsek mimo obec s nejvyšší dovolenou rychlostí 90 km/h, z čehož plyne omezení maximální rychlosti na trase. Druhým rychlostním omezením bylo, že vůz musel po 200 metrech dosáhnout rychlosti alespoň 60 km/h, aby např. nebyl brzděn provoz. Počáteční rychlost vozidla byla volena jako nulová a počáteční převodový stupeň jako 1.



Obrázek 4.2: Výškový profil trasy

4.3.1. Nastavení parametrů

Snahou bylo nastavit všechny čtyři algoritmy tak, aby jejich výpočetní čas byl vzájemně přibližně stejný.

V případě simulovaného žíhání byl zvolen geometrický chladicí plán (3.8) s parametrem $\alpha = 0,8$. Počáteční teplota byla nastavena na hodnotu 1 a konečná teplota jako 10^{-10} . Počet přijatých kroků nutných k tomu, aby mohla být snížena teplota, byl 40 a maximální počet kroků provedených při dané teplotě byl roven 100. Vektor náhodných čísel, pomocí něhož se generují nová řešení, byl po složkách násoben vhodným vektorem, čímž byla upravena jeho velikost. To bylo provedeno ve snaze reagovat na velikost množiny přípustných řešení.

Algoritmus lokálního hledání byl získán modifikací simulovaného žíhání, a to tak, že bylo zamezeno přijetí horších řešení.

U optimalizace hejnem částic byla použita akcelerovaná verze daná rovnicí (3.14) a bylo voleno 25 částic a 400 iterací. Volba parametrů byla $\alpha = 0,5$ a $\beta = 0,5$. Vektor náhodných čísel byl násoben pěti ve složkách rychlosti, opět ve snaze zachytit velikost množiny přípustných řešení.

V případě algoritmu světlušek byly volby parametrů provedeny následovně: počet světlušek byl nastaven na hodnotu 25, počet iterací 400, koeficient absorpce světla prostředím

Tabulka 4.1: Porovnání algoritmů

Algoritmus	Lokální hledání		Simulované žíhání		Opt. hejnem částic		Algoritmus světlušek	
Výpočet	spotřeba	čas	spotřeba	čas	spotřeba	čas	spotřeba	čas
	[l/100 km]	[s]	[l/100 km]	[s]	[l/100 km]	[s]	[l/100 km]	[s]
1	4,31	185,2	4,37	205,1	4,33	213,1	4,48	219,2
2	4,43	186,2	4,36	206,7	4,24	213,4	4,38	210,8
3	4,48	160,7	4,67	198,1	4,37	214,2	4,39	208,7
4	4,39	199,8	4,49	209,4	4,34	214,8	4,48	209,6
5	4,38	203,1	4,51	208,8	4,31	210,5	4,37	208,0
6	4,77	126,9	4,66	179,1	4,30	209,2	4,46	208,1
7	4,42	203,5	4,35	205,4	4,31	208,2	4,40	208,2
8	4,43	200,4	4,43	192,5	4,32	208,1	4,39	210,4
9	4,28	198,6	4,61	172,9	4,32	206,3	4,43	210,2
10	4,29	202,1	4,39	207,4	4,26	240,5	4,35	209,3
11	4,59	200,0	4,34	207,2	4,30	209,4	4,39	214,0
12	4,49	201,7	4,33	207,9	4,31	207,3	4,46	209,9
13	4,52	143,0	4,38	207,2	4,31	206,5	4,37	207,0
14	4,41	201,1	4,66	210,1	4,29	205,2	4,36	211,1
15	4,70	202,9	4,42	206,3	4,34	205,0	4,40	212,7
16	4,33	176,0	4,37	129,7	4,32	205,3	4,38	210,0
17	4,47	173,2	4,37	216,7	4,28	204,8	4,37	209,2
18	4,73	201,5	4,42	218,7	4,28	205,5	4,47	210,1
19	4,40	210,8	4,35	225,8	4,36	204,8	4,33	208,4
20	4,64	218,2	4,57	113,5	4,28	205,0	4,43	210,3
Stř. hodnota	4,47	189,7	4,45	196,4	4,31	209,9	4,40	210,3
Rozptyl	0,021	538,3	0,014	806,4	0,001	63,3	0,002	7,1

byl položen jako $\gamma = 5$, kvůli větší diverzitě řešení. Zbývající parametry byly voleny jako $\alpha = 0,6$ a $\beta_0 = 1$. Opět docházelo k násobení vektoru náhodných čísel tak, jak je uvedeno výše.

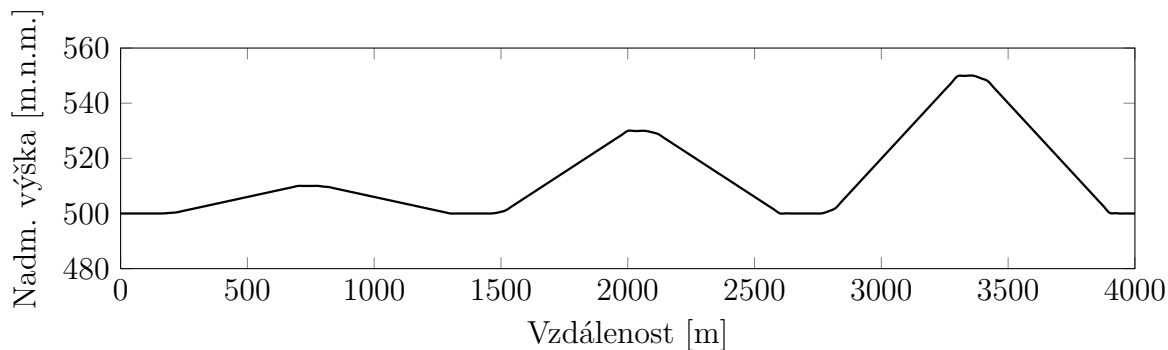
Při generování počátečního řešení a samozřejmě také v samotných výpočtech algoritmů hraje velkou roli náhodnost, proto bylo provedeno 20 testování každého z algoritmů a vyhodnocení střední hodnoty a rozptylu zjišťovaných veličin, aby bylo srovnání více objektivní. Z porovnání jednotlivých algoritmů v tabulce 4.1 se ukázalo, že pro řešení této optimalizační úlohy jsou o něco vhodnější populační algoritmy, tj. optimalizace hejnem částic a algoritmus světlušek. Ty vykazovaly během všech testování stabilní výsledky co se kvality nalezeného řešení i výpočetního času týče. Nalezená řešení navíc byla povětšinou lepší než ta nalezená algoritmem lokálního hledání nebo simulovaného žíhání. V případě simulovaného žíhání a lokálního hledání byly výpočetní časy obvykle o něco menší, ovšem větší byl jejich rozptyl. Překvapivé jsou relativně slušné výsledky algoritmu lokálního hledání, jejichž střední hodnota je sice největší ze všech, ovšem ne nějak zásadně. Rozptyl výsledků algoritmu ovšem pravděpodobně poukazuje na fakt, že nejlepší řešení nalezené lokálním hledáním je závislé na počáteční aproximaci. Větší rozptyl výsledků vyšel i v případě simulovaného žíhání, což mohlo být zapříčiněno ne zcela vhodnou volbou parametru α , případně volbou počáteční teploty nebo počtu iterací při dané teplotě.

Čas potřebný pro jeden výpočet byl poměrně nízký, z čehož mohou plynout relativně dobré výsledky lokálního hledání v porovnání s ostatními algoritmy. V případě, že by

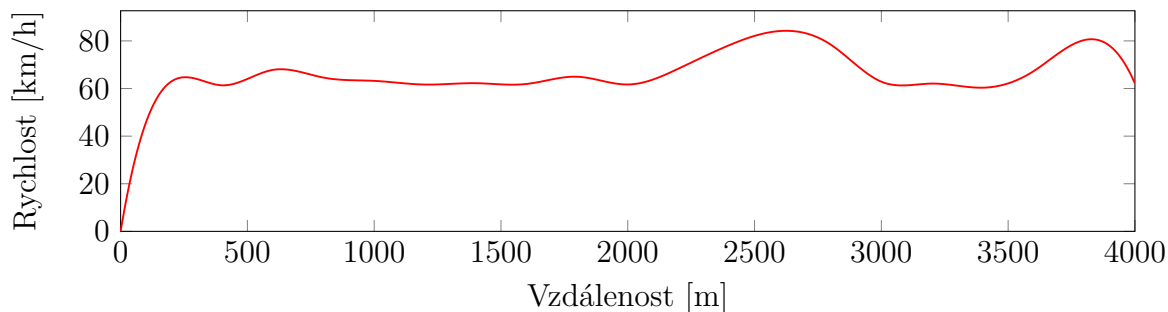
výpočetní čas byl delší, je pravděpodobné, že by rozdíl mezi výsledky lokálního hledání a ostatních algoritmů byl větší. Níže je uvedeno a okomentováno nejlepší nalezené řešení, tedy test č. 2 optimalizace hejnem částic.

4.3.2. Nalezené řešení

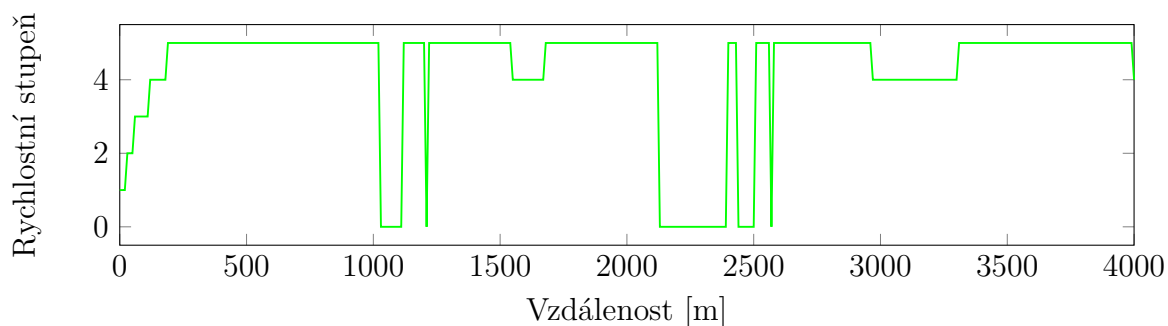
Pro přehlednost opět uvádíme i výškový profil trasy popsany výše.



Obrázek 4.3: Výškový profil



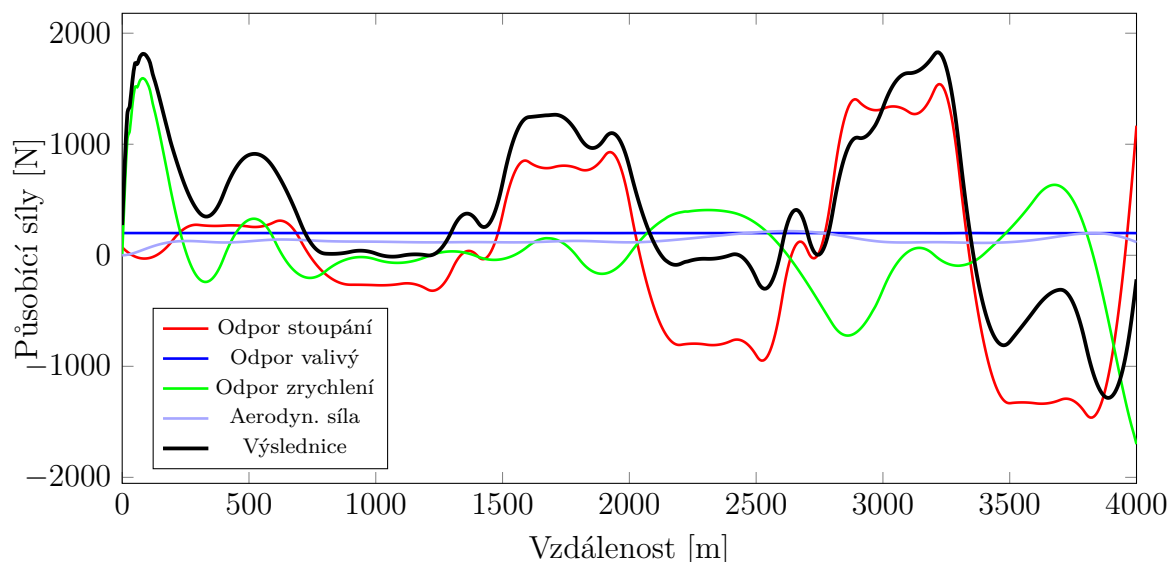
Obrázek 4.4: Průběh rychlosti



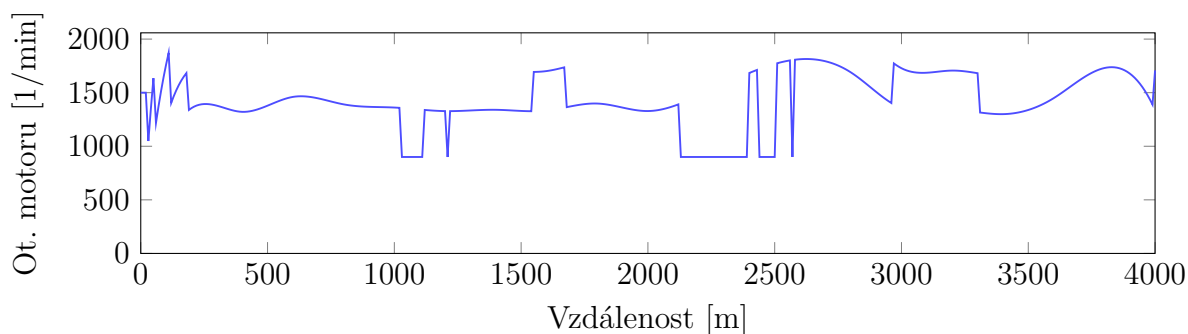
Obrázek 4.5: Průběh řazení

Jak je možno vidět, algoritmus se podél celé trasy víceméně snažil udržovat nejmenší dovolenou rychlost vozidla a co nejvyšší rychlostní stupeň, z čehož plynou nižší otáčky motoru. Snaha o co nejmenší rychlost je způsobena aerodynamickou silou, která roste se čtvercem rychlosti, a tendence jet na co nejvyšší rychlostní stupeň plyne z úplné rychlostní charakteristiky motoru, ve které se nejmenší hodnoty měrné spotřeby paliva vyskytují spíše v menších otáčkách. V průběhu rychlosti výjimku tvoří pouze klesání, kde

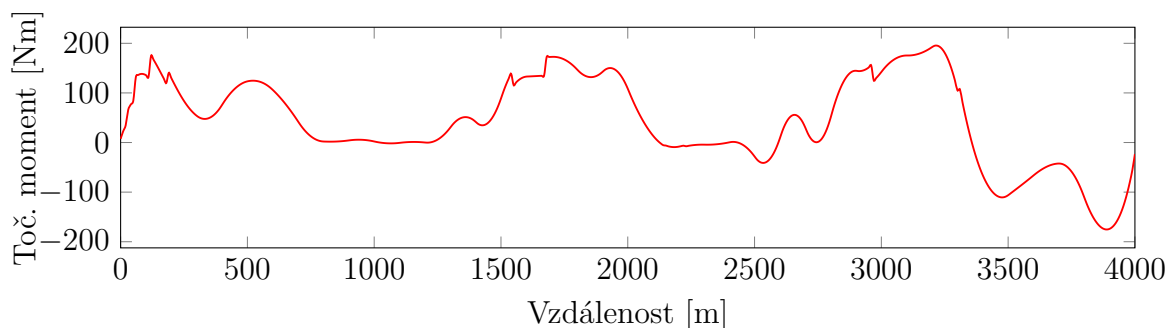
vůz může pomocí vyřazeného rychlostního stupně nabrat rychlost, aniž by spotřeboval výrazné množství paliva. Rozjezd byl proveden tak, aby byl splněn požadavek na minimální rychlost 60 km/h po 200 metrech od začátku trasy. Z obr. 4.7 můžeme vidět, že i při rozjezdu se otáčky pohybovaly pod 2000 ot./min, což plně koresponduje s radami pro úspornou jízdu v [3]. Následně byl udržován v podstatě konstantní režim, kdy se rychlost vozidla příliš neměnila a stále byla zařazena nejvyšší rychlost. Takto vůz překonal první stoupání. Na klesání byl nejprve mírně sešlápnut plynový pedál, aby vůz jel dostatečně rychle a jeho rychlost neklesla pod 60 km/h, pak bylo na chvíli vyřazeno a vůz zřejmě ani příliš nezrychloval, což lze vyvodit i z velikosti výslednice sil na obr. 4.6, která je na zmíněném intervalu přibližně nulová. Zřejmě opět z důvodu omezení nejnižší dovolené rychlosti byl pak opět zařazen nejvyšší rychlostní stupeň a vůz nepatrně zrychlil. Ještě před koncem prvního klesání došlo k dalšímu vyřazení rychlostního stupně, které trvalo velmi krátkou dobu (vůz ujel cca 30-40 metrů), což je trochu diskutabilní, neboť místo tak krátkého vyřazení by mohl zůstat rychlostní stupeň zařazen, což by vedlo k nižšímu opotřebení spojky. Na začátku druhého stoupání bylo podřazeno a byl přidán plyn, nicméně rychlost se stále udržovala spíše u spodní dovolené hranice. Při stoupání byl pak řazen dokonce vyšší rychlostní stupeň, což může být také diskutabilní, neboť pak motor pracoval v relativně nízkých otáčkách a při vyšším točivém momentu, což by mohlo mít za následek např. vibrace v hnacím ústrojí apod. Tento fakt ale nebyl rozebírán, neboť by to přesahovalo rámec této práce. Po konci rovinky na vrcholu druhého kopce bylo vyřazeno, jelikož sklon byl dostatečný k tomu, aby vůz udržel požadovanou minimální rychlost a dokonce i zrychloval. U konce klesání pak byl zařazen nejvyšší rychlostní stupeň, zřejmě proto, aby byl vůz trochu přibrzděn a rychlost nepřesáhla 90 km/h. Pak se opět mírně přidal plyn. Při posledním a nejprudším stoupání bylo třeba podřadit, otáčky ale příliš nevrostly, takže to v tomto případě z hlediska spotřeby není výraznější prohrěšek. Po konci závěrečného stoupání byl zařazen nejvyšší rychlostní stupeň, který byl pak využit při brzdění v klesání a vůz jel tedy s nulovou spotřebou.



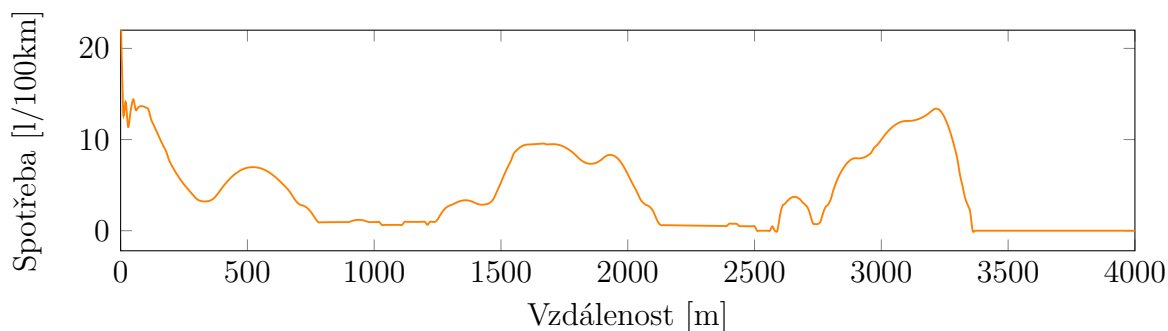
Obrázek 4.6: Síly působící na vozidlo



Obrázek 4.7: Průběh otáček



Obrázek 4.8: Průběh točivého momentu



Obrázek 4.9: Průběh spotřeby paliva

Jak už bylo zmíněno výše, podél celé trasy byly udržovány nízké otáčky motoru. Ovšem točivý moment motoru se při rozjezdu a ve stoupání blížil i točivému momentu maximálnímu, což indikuje důrazné sešlápnutí plynového pedálu. To je opět v korespondenci s [3], kde se z hlediska spotřeby doporučuje rozjíždět klidně i pod plným plynem, ovšem v nízkých otáčkách.

Průběh spotřeby paliva přibližně odpovídal výškovému profilu trasy. Nejvyšší spotřeba paliva byla při rozjezdu a při výjezdu do závěrečného stoupání, což může plynout i z obrázku 4.6, kde odpor zrychlení při rozjezdu, resp. odpor stoupání v posledním výjezdu dosahuje největších hodnot. Průměrná spotřeba na celé trase činila 4,24 l/100 km, jak je uvedeno v tabulce 4.1.

Z této simulace tedy vyplývá, že vhodné je udržovat co nejvyšší rychlostní stupeň, a tedy nízké otáčky motoru a pokud možno i konstantní rychlost, jelikož odpor zrychlení hraje u spotřeby paliva významnou roli. V rámci nižších otáček motoru lze ale využít téměř veškerý dostupný točivý moment motoru, a tedy se připouští sešlápnout plyn i důrazněji. Při méně prudkých klesáních se vyplatí vyřadit rychlostní stupeň a jet na neutrál, ovšem v rámci rychlostních omezení. Při větším klesání je samozřejmě naopak výhodné brzdít motorem, neboť je spotřeba nižší než při jízdě na neutrál.

5. Závěr

Cílem této práce bylo nalézt vhodný průběh rychlosti automobilu a řazení tak, aby byla spotřeba paliva na dané trase minimální. K tomu, aby tento průběh vůbec mohl optimalizován, bylo nejprve nutné sestavit vhodný model popisující závislost mezi veličinami charakterizujícími pohyb vozidla a spotřebou paliva vozidla. Při tvorbě modelu bylo třeba využít poznatky z oblasti podélné dynamiky vozidel, zejména tedy jízdních odporů, a také z oblasti spalovacích motorů a jejich spotřeby paliva. Teoreticky jsou tyto poznatky shrnuty v první kapitole a prakticky jsou uplatněny v kapitole druhé, která popisuje tvorbu matematického modelu vozidla a naznačuje také jím dosažené dílčí výsledky. Model obsahuje některá zjednodušení, která by dalším rozšiřováním a zlepšováním modelu mohla být odstraněna, zejména nezávislost součinitele valivého odporu na rychlosti a řazení probíhající bez prodlevy. Model by také mohl být rozšířen o další vozidla s jinými parametry, čímž by mohlo docházet k jejich vzájemnému srovnání z hlediska spotřeby paliva.

Pro nalezení optimálního řešení byly využity vybrané heuristické algoritmy, které jsou představeny v kapitole 3. V jejím úvodu je proveden stručný úvod do optimalizace a také charakteristika skupiny heuristických algoritmů. Následně je teoreticky popsán algoritmus lokálního hledání, simulovaného žíhání, optimalizace hejnem částic a algoritmus světlušek. Zmíněné algoritmy byly implementovány v prostředí MATLAB a „propojeny“ s vytvořeným modelem pohybu vozidla. Dosažené výsledky jsou shrnuty ve čtvrté kapitole, která rozebírá optimální jízdní režim na trase s třemi stoupáními o různých sklonech. Výsledky algoritmů jsou v jistých směrech předvídatelné, avšak pro konkrétní vozidlo a konkrétní motor mohou poskytnout detailnější informace o tom, jak z hlediska spotřeby volit vhodný jízdní režim, hladinu otáček motoru, oblast točivých momentů apod. Určitým nedostatkem optimalizačního modelu je hledání vhodného průběhu řazení, při kterém může docházet k řazení jednotlivých rychlostí na velmi krátké okamžiky, což není žádoucí. Model také nepostihuje možné požadavky na zamezení jízdy při nižších otáčkách motoru, ovšem s vývojem spalovacích motorů je tato otázka stále méně aktuální.

Dalším z cílů práce bylo také vzájemné srovnání optimalizačních algoritmů, kde se potvrdilo, že sofistikovanější metody, jako je optimalizace hejnem částic a algoritmus světlušek, předčí jednodušší metodu lokálního hledání, avšak rozdíl není výrazný. Výhodnost užití sofistikovanějších metod by se zřejmě ukázala, pokud by řešená úloha byla rozsáhlejší nebo i v případě, kdy by byl nastaven větší výpočetní čas algoritmů.

Seznam použité literatury

- [1] Automotive handbook. 6th rev. and extended ed. London: Professional Engineering Pub., 2004. ISBN 1860584748.
- [2] Bakalářská fyzika pro HGF VŠB-TUO [online] [cit. 2017-04-22] Dostupné z: <http://if.vsb.cz/bf/40.html>
- [3] BAUER, H. Gasoline-engine management. 2nd ed., completely rev. and extended. Bury St. Edmunds: Professional Engineering, 2004. ISBN 1860584349.
- [4] DRAŽKA, Jan: Matematické modelování spotřeby paliva vozidla: Bakalářská práce, Brno, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky, 2011, 60 s. Vedoucí práce RNDr. Pavel Popela, Ph.D.
- [5] ECOMODDER [online] [cit. 2017-05-11] Dostupné z: [http://ecomodder.com/wiki/index.php/Brake_Specific_Fuel_Consumption_\(BSFC\)_Maps](http://ecomodder.com/wiki/index.php/Brake_Specific_Fuel_Consumption_(BSFC)_Maps)
- [6] EDITED BY FRED GLOVER a GARY A. KOCHENBERGER. Handbook of metaheuristics. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003. ISBN 0306480565.
- [7] GILLESPIE, T. D. Fundamentals of vehicle dynamics. Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 1992. ISBN 1560911999.
- [8] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Brno: VUTUM, 2000. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 8021418699.
- [9] HROMÁDKO, Jan. Spalovací motory: komplexní přehled problematiky pro všechny typy technických automobilních škol. Praha: Grada, 2011. ISBN 9788024734750.
- [10] KLAPKA, Jindřich. Metody operačního výzkumu. Vyd. 2. Brno: VUTUM, 2001. ISBN 8021418397.
- [11] PORTEŠ, P. Podélná dynamika vozidel. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 61s. Vedoucí diplomové práce Ing. Lubor Zháňal.
- [12] RAO, Singiresu S. Engineering optimization: theory and practice. 4th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley, 2009. ISBN 9780470183526.
- [13] RAUSCHER, J., Spalovací motory, Studijní opory VUT v Brně, 2005.
- [14] SAERENS, B., et al.: Minimization of the fuel consumption of a gasoline engine using dynamic optimization. *Applied Energy*, September 2009, vol. 86, no. 9, p. 1582-1588. ISSN 0306-2619.
- [15] ŠANDERA, Č. Heuristic algorithms in optimization. Brno University of Technology, 2008. 61s. Vedoucí diplomové práce Ing. Jan Roupec Ph.D.

- [16] TALBI, El-Ghazali. Metaheuristics: from design to implementation. Hoboken, N.J.: John Wiley, 2009. ISBN 9780470278581.
- [17] VLK, František. Dynamika motorových vozidel. 2. vyd. Brno: František Vlk, 2003. ISBN 8023900242.
- [18] YANG, Xin-She, Firefly algorithms for multimodal optimization, *Stochastic Algorithms: Foundations and Applications*, SAGA 2009, Lecture Notes in Computer Sciences, Vol. 5792, pp. 169-178 (2009).
- [19] YANG, Xin-She. Nature-inspired optimization algorithms. ISBN 9780124167438.
- [20] YANG, Xin-She. Engineering optimization: an introduction with metaheuristic applications. Hoboken, N.J.: John Wiley, 2010. ISBN 9780470582466.

Seznam použitých zkratk a symbolů

Symbol	Jednotka	Veličina
a	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	zrychlení vozidla
c_x	-	součinitel odporu vzduchu
F_{DA}	N	aerodynamická síla
F_{GR}	N	odpor stoupání
F_{IN}	N	odpor zrychlení
F_n	N	normálová síla
f_r	-	součinitel valivého odporu
F_{RR}	N	valivý odpor
F_X	N	hnací síla
g	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	tíhové zrychlení
G	N	tíhová síla
i	-	zařazený rychlostní stupeň
I_d	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	moment setrvačnosti částí rozvodovky
I_e	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	moment setrvačnosti motoru
I_t	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	moment setrvačnosti částí převodovky
I_w	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	moment setrvačnosti kol a poloos
M	kg	hmotnost vozidla
m_p	$\text{g} \cdot \text{kWh}^{-1}$	měrná spotřeba paliva
M_p	l/100 km	dráhová objemová spotřeba paliva
M_{tm}	$\text{g} \cdot \text{h}^{-1}$	hodinová hmotnostní spotřeba paliva
M_{tV}	$\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$	hodinová objemová spotřeba paliva
n	min^{-1}	otáčky motoru
N	N	radiální reakce vozovky
N_f	-	převodový poměr rozvodovky
N_t	-	převodový poměr převodovky
N_{tf}	-	celkový převodový poměr
P	kW, W	efektivní výkon motoru
p_{me}	Pa	střední efektivní tlak
r_d	m	dynamický poloměr kola
S_x	m^2	čelní plocha vozidla
T_a	Nm	točivý moment na výstupu z rozvodovky
T_c	Nm	točivý moment na spojce
T_d	Nm	točivý moment na výstupu z převodovky

Symbol	Jednotka	Veličina
T_e	Nm	točivý moment motoru
u	-	míra sešlápnutí plynového pedálu
v	$\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	rychlost vozidla
V_H	m^3	zdvihový objem motoru
α	$^\circ$	úhel stoupání
α_d	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$	úhlové zrychlení rozvodovky
α_e	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$	úhlové zrychlení motoru
α_t	rad	úhel sešlápnutí plynového pedálu
α_w	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$	úhlové zrychlení kol a poloos
Φ_p	$\text{l}/100 \text{ km}$	průměrná dráhová objemová spotřeba paliva
η_{tf}	-	mechanická účinnost hnacího ústrojí
ρ	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	hustota vzduchu
ρ_p	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	hustota paliva
ϑ	-	součinitel rotačních součástí
ξ	m	rameno valivého odporu

Seznam příloh

- A. Použitá data a parametry
- B. Další výsledky

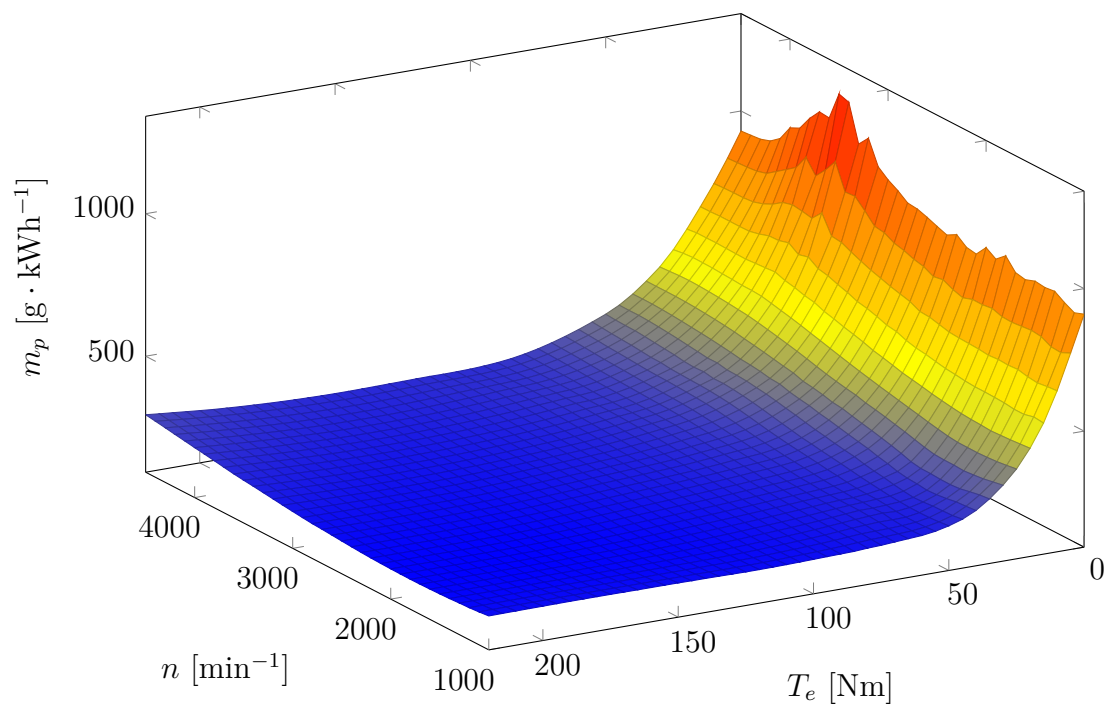
A. Použitá data a parametry

V níže uvedené tabulce jsou uvedena data použitá v matematickém modelu. Jedná se o parametry vozidla Škoda Octavia I s motorem 1.9 TDI, 66 kW ALH.

Tabulka A.1: Parametry vozidla a prostředí

Veličina	Symbol	Hodnota	Jednotka
Čelní plocha vozidla	S_x	2,0597	m ²
Dynamický poloměr kola	r_d	0,31725	m
Hmotnost vozidla	M	1360	kg
Hustota paliva (nafty)	ρ_p	830	kg · m ⁻³
Hustota vzduchu	ρ	1,2047	kg · m ⁻³
Maximální otáčky motoru	n_{max}	4500	min ⁻¹
Minimální otáčky motoru	n_{min}	1000	min ⁻¹
Mechanická účinnost převodovky	η_t	0,95	-
Mechanická účinnost rozvodovky	η_f	0,95	-
Převodový poměr 1. rychlostního stupně	N_{t1}	3,78	-
Převodový poměr 2. rychlostního stupně	N_{t2}	2,12	-
Převodový poměr 3. rychlostního stupně	N_{t3}	1,36	-
Převodový poměr 4. rychlostního stupně	N_{t4}	0,97	-
Převodový poměr 5. rychlostního stupně	N_{t5}	0,76	-
Převodový poměr rozvodovky	N_f	3,389	-
Součinitel odporu vzduchu	c_x	0,32	-
Součinitel valivého odporu	f_r	0,015	-
Tíhové zrychlení	g	9,81	m · s ⁻²
Volnoběžná spotřeba	$M_{tV,vol}$	0,4	l · h ⁻¹
Volnoběžné otáčky	n_{vol}	900	min ⁻¹

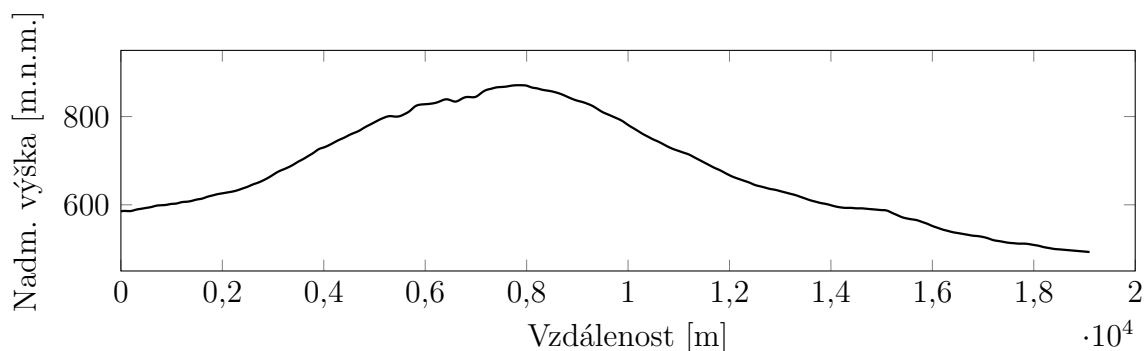
Použitá rychlostní charakteristika je uvedena na obrázku 1.4. Její aproximace použitá v modelu je uvedena na obrázku A.1.



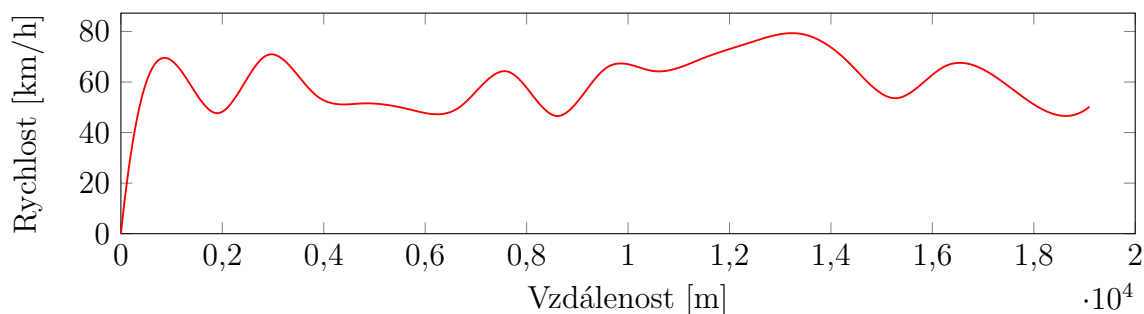
Obrázek A.1: Aproximace úplné rychlostní charakteristiky motoru

B. Další výsledky

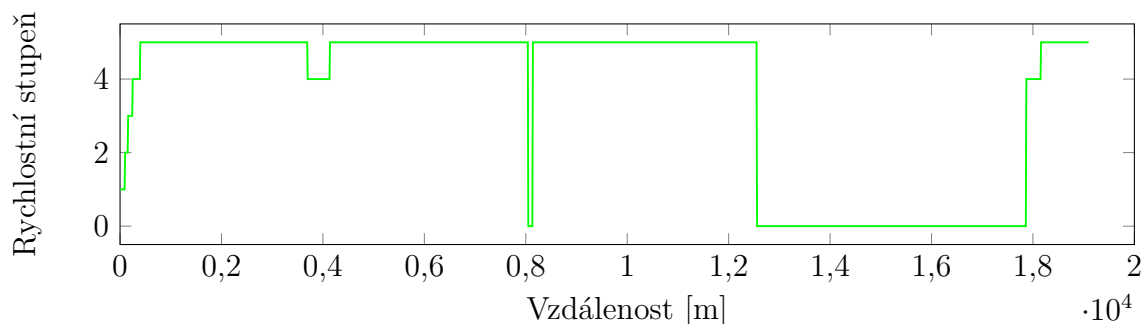
Zde je uvedena ještě jedna simulace jízdy, ve které výškový profil představuje reálný, zhruba devatenáctikilometrový úsek, kde přibližně prvních 8 kilometrů tvoří stoupání o celkovém převýšení zhruba 300 výškových metrů a zbývajících 11 km klesání o převýšení cca 400 výškových metrů. Stojí za povšimnutí, že výšková bilance mezi počátečním a koncovým bodem je záporná, což se promítne i na průměrné spotřebě. Na trase byla volena maximální dovolená rychlost jako 100 km/h a vůz musel po prvním kilometru jízdy dosáhnout rychlosti alespoň 40 km/h. Rozjezd byl z klidu při zařazeném prvním rychlostním stupni.



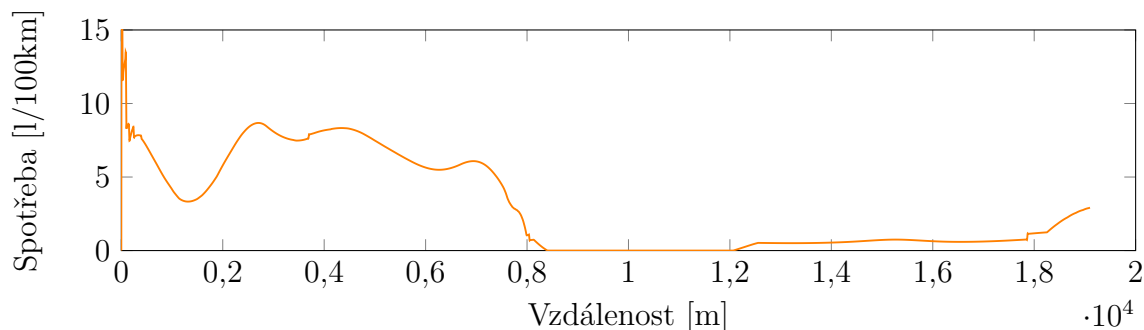
Obrázek B.1: Výškový profil



Obrázek B.2: Průběh rychlosti



Obrázek B.3: Průběh řazení



Obrázek B.4: Průběh spotřeby paliva

Nalezené řešení bylo získáno pomocí algoritmu světlušek, kde jejich počet byl nastaven na 40 a počet iterací jako 200, ostatní parametry byly voleny jako při simulaci rozebrané ve čtvrté kapitole.

Jak je vidět z uvedených obrázků, snahou opět bylo jet povětšinou při nejvyšším zařazeném rychlostním stupni a udržovat tak co nejnížší možné otáčky, v nejprudší části stoupání bylo ovšem podřazeno. Na vrcholu kopce bylo na chvíli vyřazeno a pak bylo v prudším klesání brzděno motorem. Sklon se ovšem zmenšoval, a tak bylo cca po 12,5 km vyřazeno a vůz ujel na neutrál přibližně 5 km. V závěru jízdy ovšem bylo nutno opět zařadit rychlost a vozidlo trochu rozjet, aby bylo splněno omezení nejnížší možné rychlosti. Průměrná spotřeba paliva na trase byla 3,01 l/100 km.

Tato simulace byla vybrána, protože se nabízelo srovnání s reálnou jízdou, neboť bylo k dispozici vozidlo s velmi podobnými parametry. Trasa byla několikrát projeta ve snaze docílit co nejnížší spotřeby, nejnížší zjištěná hodnota spotřeby na konci trasy byla palubním počítačem stanovena jako 3,4 l/100 km. Rozdíl mezi simulací a reálnou jízdou je pochopitelný vzhledem k tomu, že v simulaci se řadí bez prodlevy a není zahrnut vliv zatáček. Při reálné jízdě také určitě nebyl dodržen průběh rychlosti získaný simulací a motor neměl po celou dobu jízdy stálou provozní teplotu. Ovšem podstatné je, že průběh simulace zhruba odpovídá tomu, jak řidič jel, když byla palubním počítačem naměřena nejnížší hodnota spotřeby paliva. U vrcholu kopce bylo skutečně na chvíli vyřazeno a následně brzděno motorem, stejně tak bylo vyřazeno i tehdy, když se sklon klesání začal zmenšovat a takto při reálné jízdě vůz ujel přibližně oněch 5 km. Vyřazení rychlosti na této trase je skutečně výhodné, neboť při reálných jízdách, kdy nebylo připuštěno vyřazení, se hodnota průměrné spotřeby v l/100 km pohybovala o několik desetin výše.

Výsledky této simulace ukazují, že sestavený model má určitou výpovědní hodnotu a pokud by byl dále vylepšen a modifikován, mohl by velmi blízce popisovat realitu.